# Guía 1

**Conjuntos factibles, preferencias y optimización del consumidor**

Yerson Olivares Bonilla

2026-04-21

## Tabla de contenidos

# 1. Guía 1

**Ramo:** Política de las Políticas Públicas / Economía
**Estudiante:** Yerson Olivares Bonilla
**Guía:** Guía 1
**Fecha:** 21-04-2026

**Cómo leer esta resolución.** En cada ejercicio primero aparece el **enunciado**, luego una **explicación intuitiva**, después el **desarrollo formal paso a paso** y finalmente un **apoyo visual** (gráfico o tabla). La guía está escrita pensando en alguien que está empezando en economía, así que explico qué representa cada pendiente, restricción, curva de indiferencia y costo de oportunidad.

## 2. Parte I. Comentarios conceptuales

### 2.1. 1. El conjunto factible como frontera de lo posible

#### 2.1.1. Enunciado

> **(El conjunto factible como frontera de lo posible.)** Una estudiante dispone de 24 horas al día que puede repartir entre estudiar ($h_e$) y descansar ($h_d$). Un compañero le dice: "Tus opciones son infinitas". Comente la afirmación: ¿es correcto que las opciones son infinitas?, ¿en qué sentido existe entonces una restricción? Describa cómo luce geométricamente el conjunto factible de esta estudiante en el plano $(h_e, h_d)$, identifique su frontera y explique qué implica económicamente estar **por debajo** de esa frontera versus estar **sobre** ella.

#### 2.1.2. Respuesta

Es verdad que la estudiante tiene **muchas combinaciones posibles** de estudio y descanso: por ejemplo $(10, 14)$, $(10{,}5, 13{,}5)$, $(8, 16)$, etc. En ese sentido, sus opciones pueden verse como "infinitas", porque el tiempo puede dividirse en fracciones.

Pero eso **no elimina la restricción**. La restricción existe porque el recurso total disponible está fijo en 24 horas. Por tanto, no cualquier combinación es posible: solo lo son las que cumplen

$$h_e + h_d \leq 24.$$

Geométricamente, el conjunto factible es la región bajo la recta

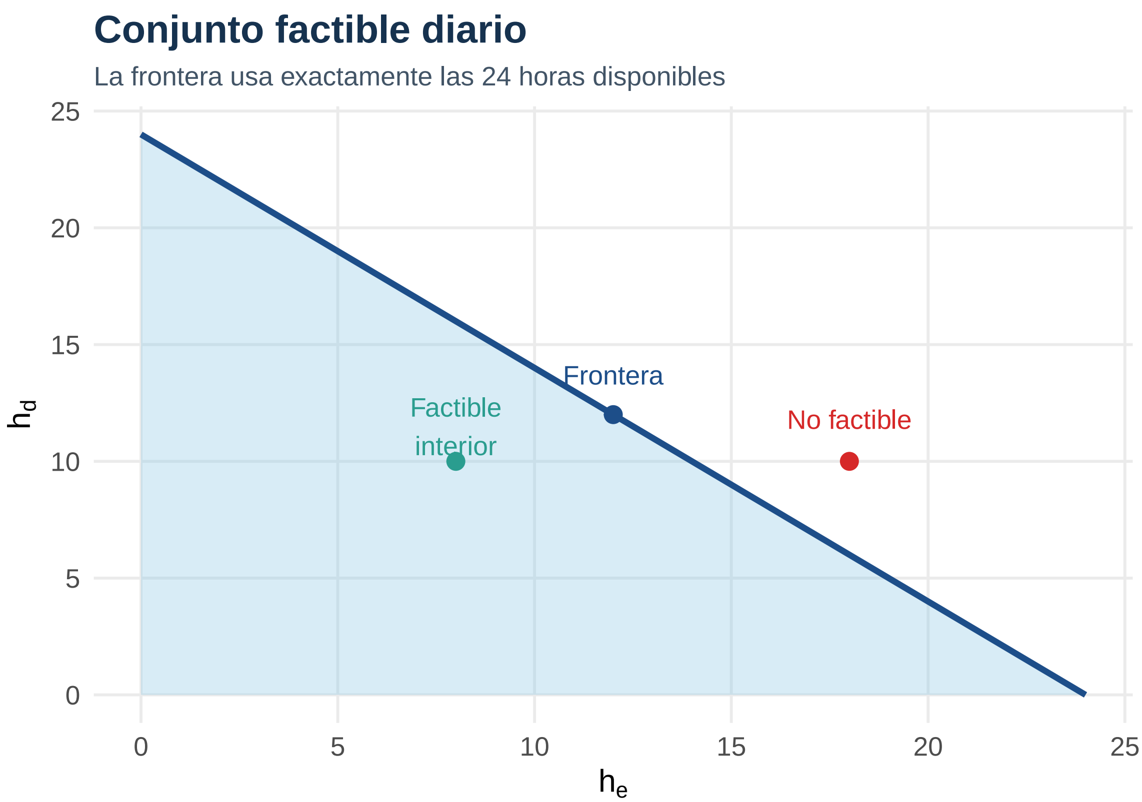
$$h_d = 24 - h_e.$$

La **frontera** es justamente esa recta. Sobre ella, la estudiante usa exactamente las 24 horas. Debajo de ella, todavía quedan horas sin asignar: el plan sigue siendo factible, pero no usa completamente el recurso escaso. Por encima de la recta, la combinación es imposible porque exigiría más de 24 horas al día.

Económicamente:

- **sobre la frontera**: uso completo del tiempo disponible;
- **bajo la frontera**: plan factible, pero con tiempo ocioso sin asignar;
- **sobre la recta en sentido superior**: plan no factible.

La idea central es que **escasez no significa pocas opciones; significa que no todas las opciones pueden elegirse al mismo tiempo**.




## 2.2. 2. La tasa marginal de sustitución como precio de oportunidad subjetivo

### 2.2.1. Enunciado

**(La tasa marginal de sustitución como precio de oportunidad subjetivo.)** Un agricultor puede producir trigo ($T$) o maíz ($M$) en su parcela. Cuando produce poco trigo ya, está dispuesto a sacrificar 3 kg de maíz por 1 kg adicional de trigo. Cuando produce mucho trigo, solo está dispuesto a sacrificar 0,5 kg de maíz. Comente: ¿qué fenómeno explica este cambio en la disposición a sacrificar? ¿Cómo se refleja esta dinámica en la forma de las curvas de indiferencia? ¿Es este comportamiento consistente con preferencias convexas?

#### 2.2.2. Respuesta

La idea clave es que el valor subjetivo de un bien depende de **cuánto de ese bien ya se tiene**. Cuando el agricultor tiene poco trigo, una unidad extra de trigo le resulta muy valiosa. Por eso está dispuesto a sacrificar bastante maíz por conseguirla. En cambio, cuando ya tiene mucho trigo, una unidad adicional de trigo le aporta menos y entonces sacrifica menos maíz.

Eso significa que la **Tasa Marginal de Sustitución (TMS)** entre trigo y maíz cae a medida que aumenta la cantidad de trigo. En términos económicos, aparece la **utilidad marginal decreciente** del bien relativamente abundante.

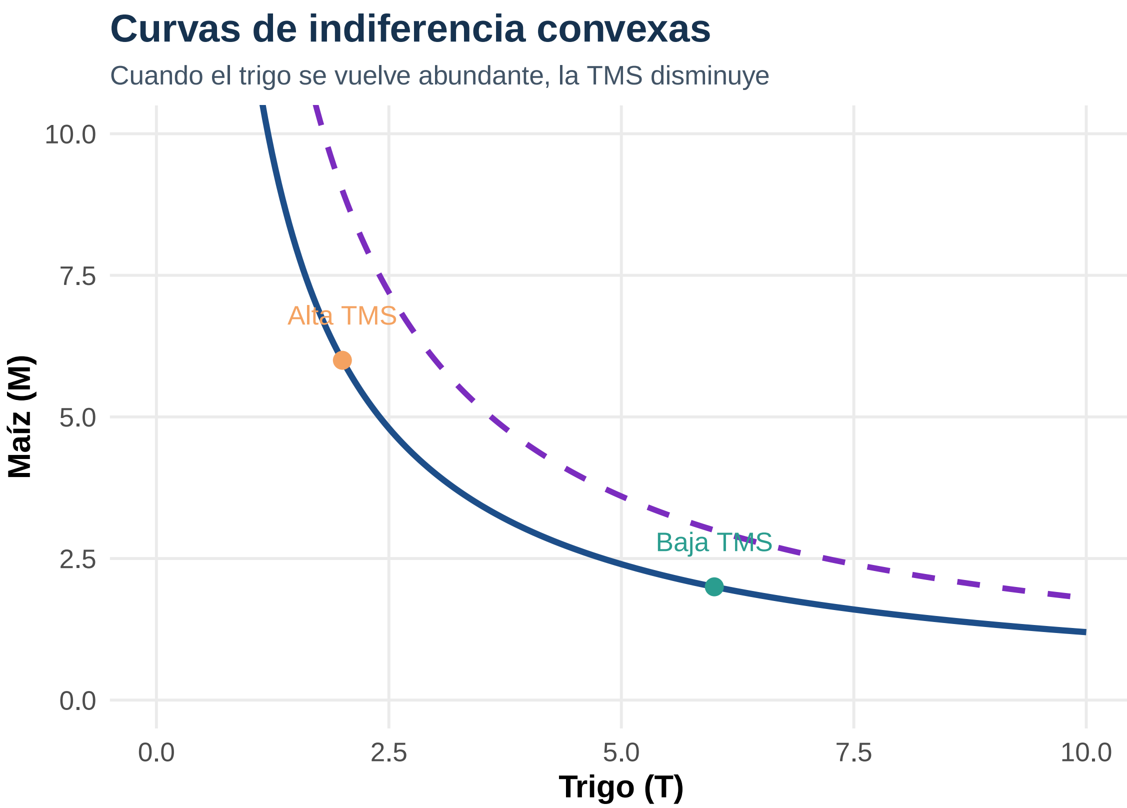
En las curvas de indiferencia esto se refleja así:

- cuando el agricultor está en una zona con **poco trigo**, la curva es más empinada en valor absoluto;
- cuando está en una zona con **mucho trigo**, la curva es más plana.

Por eso las curvas de indiferencia son **convexas al origen**. Este comportamiento **sí es consistente con preferencias convexas**, porque la convexidad dice justamente que las personas prefieren combinaciones más equilibradas y que la disposición a sustituir un bien por otro cae cuando uno de los bienes se vuelve relativamente abundante.

Tabla 1: La TMS cae cuando el trigo deja de ser escaso

| situación | TMS (kg de maíz por 1 kg de trigo) | interpretación |
|---|---:|---|
| Poco trigo | 3.0 | El trigo es escaso y muy valioso |
| Mucho trigo | 0.5 | El trigo es abundante y vale relativamente menos |




## 2.3. 3. FPP cóncava y costo de oportunidad creciente

### 2.3.1. Enunciado

> **(FPP cóncava y costo de oportunidad creciente.)** Un país puede producir aviones ($A$) o trigo ($T$). Al principio, reducir la producción de trigo en 1 tonelada libera recursos suficientes para un avión. Pero al seguir transfiriendo recursos hacia aviones, cada avión adicional cuesta cada vez más trigo. Comente por qué la Frontera de Posibilidades de Producción (FPP) tiene forma cóncava hacia el origen y no es una línea recta. ¿Qué supuesto sobre los recursos productivos explica esta concavidad? ¿Qué ocurriría con la forma de la FPP si todos los recursos fueran perfectamente adaptables a cualquier uso?

### 2.3.2. Respuesta

La FPP tiene forma **cóncava hacia el origen** porque el costo de oportunidad de producir aviones es **creciente**. Al comienzo, cuando el país produce pocos aviones, puede mover a esa industria recursos que se adaptan relativamente bien a fabricar aviones y no tan bien a producir trigo. En esa etapa, el sacrificio de trigo por un avión adicional es pequeño.

Pero si el país sigue transfiriendo recursos hacia la producción de aviones, empieza a retirar factores que eran muy productivos en trigo y poco productivos en aviones. Entonces **cada avión adicional requiere sacrificar cada vez más trigo**.

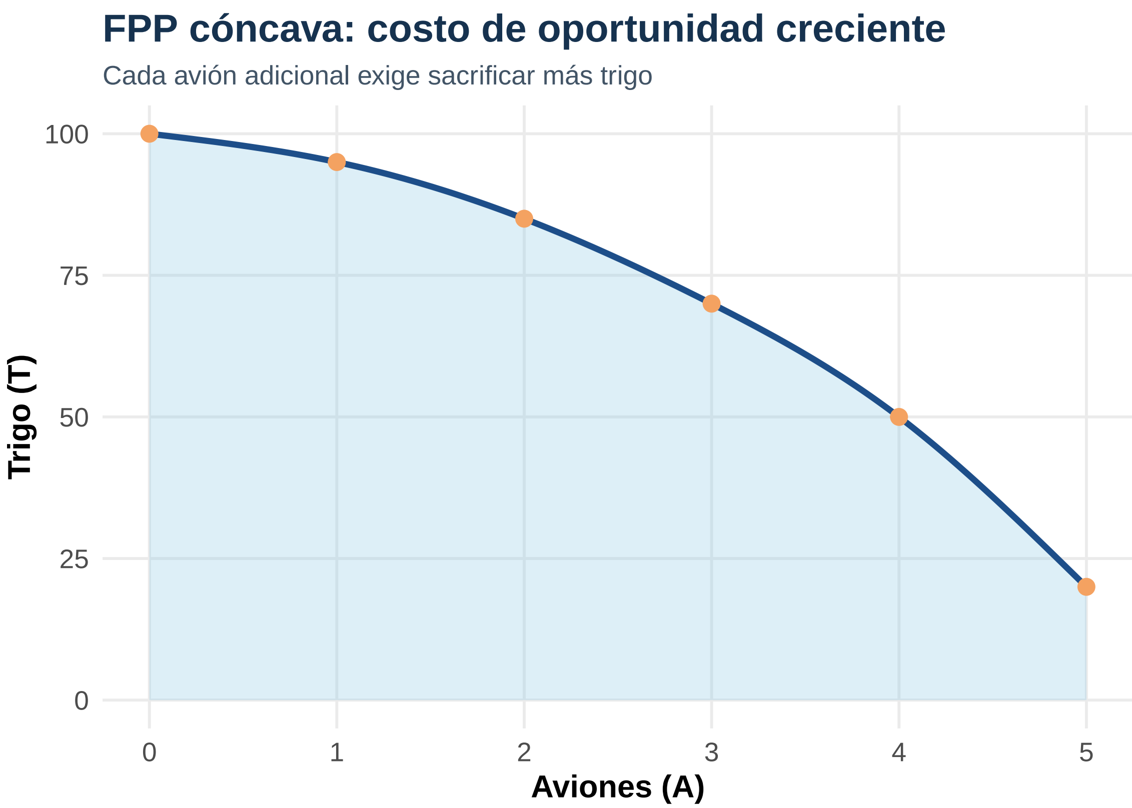
Por eso la FPP **no es una línea recta**. Una recta implicaría costo de oportunidad constante: siempre el mismo intercambio entre trigo y aviones. Aquí el intercambio cambia a medida que nos movemos sobre la frontera.

El supuesto que explica esta concavidad es que los recursos productivos son **heterogéneos o especializados**. No todas las máquinas, trabajadores o tierras son igual de buenos para todo.

Si todos los recursos fueran **perfectamente adaptables** y tuvieran la misma productividad relativa en ambos usos, el costo de oportunidad sería constante. En ese caso, la FPP sería una **línea recta**.

Tabla 2: El costo de oportunidad del avión va aumentando

| aviones | trigo_inicial | trigo_final | trigo sacrificado por avión adicional |
|---:|---:|---:|---:|
| 1 | 100 | 95 | 5 |
| 2 | 95 | 85 | 10 |
| 3 | 85 | 70 | 15 |
| 4 | 70 | 50 | 20 |
| 5 | 50 | 20 | 30 |




## 2.4. 4. Preferencias y no saciedad local

### 2.4.1. Enunciado

> **(Preferencias y el supuesto de no saciedad.)** Un economista modela a un consumidor que prefiere siempre "más a menos" de cualquier bien. Su colega lo interrumpe: "¡Pero en algún momento uno se harta de comer helado!". Comente el supuesto de **no saciedad local** (más siempre es mejor): ¿es una descripción realista?, ¿por qué es un supuesto útil a pesar de sus limitaciones?, y ¿cómo afecta la forma y posición de las curvas de indiferencia si se cumple?

### 2.4.2. Respuesta

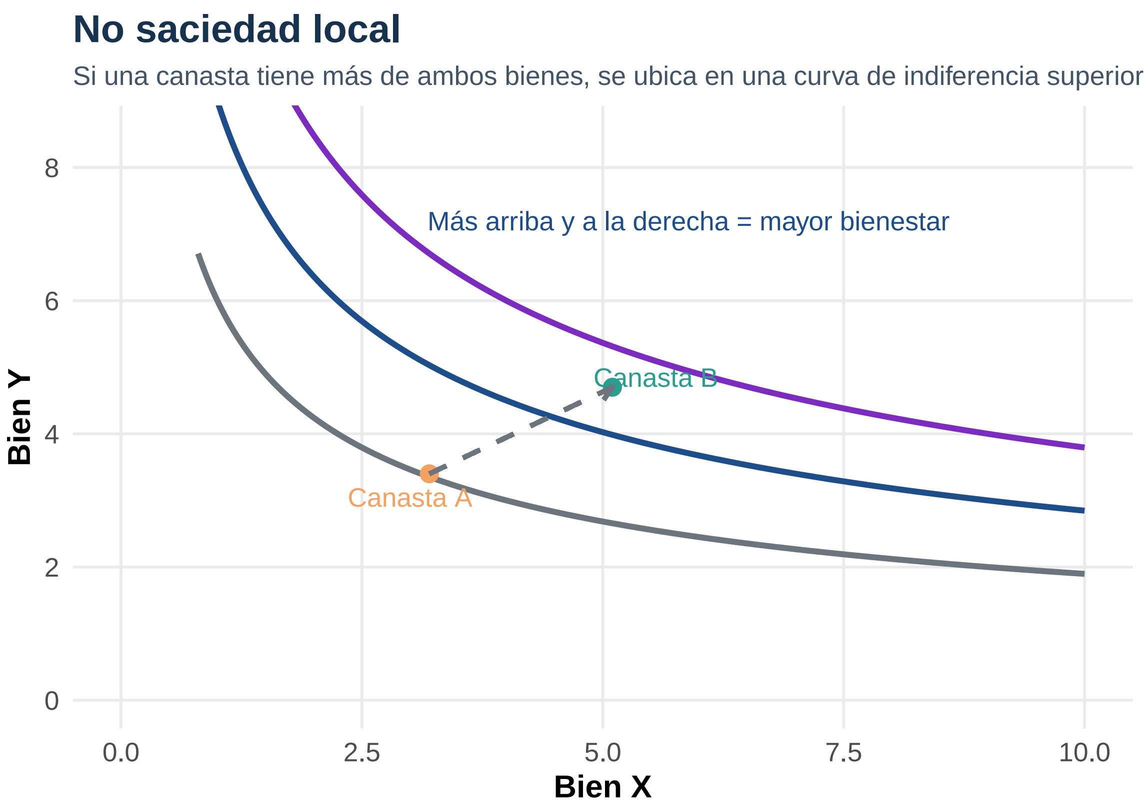
Tomado literalmente, el supuesto de no saciedad local **no es realista en todas las situaciones**. Es cierto que una persona puede saturarse de helado, de horas de ocio o de cualquier otro bien. Por eso, "más siempre es mejor" no debe leerse como una descripción psicológica exacta de toda decisión real.

Aun así, es un supuesto muy útil porque permite ordenar canastas de forma clara. Si una canasta tiene **más de ambos bienes** que otra, entonces sabemos que la persona la prefiere. Eso simplifica el análisis y hace posible estudiar elecciones óptimas sin introducir demasiadas excepciones desde el principio.

Si este supuesto se cumple:

- las curvas de indiferencia más altas representan mayor bienestar;
- las curvas son decrecientes, porque una canasta con más de ambos bienes no puede dejar indiferente a la persona;
- el consumidor tenderá a buscar la frontera de su conjunto factible, no a quedarse en el interior si puede mejorar.

La idea visual es simple: moverse hacia el **noreste** del plano (más de ambos bienes) significa ir a canastas preferidas.



## 2.5. 5. El óptimo del consumidor como tangencia

### 2.5.1. Enunciado

> **(El óptimo del consumidor como tangencia.)** Camila maximiza su bienestar eligiendo cuántas horas dedica al trabajo remunerado ($\ell$) y al ocio ($o$). Un asesor le dice: "Trabaja hasta que tu salario sea igual a tu valoración subjetiva del ocio". Comente esta afirmación en términos geométricos: ¿qué condición describe la tangencia entre la restricción presupuestaria y la curva de indiferencia en el óptimo?, ¿cuál es la interpretación económica de esa condición?, y ¿qué ocurre si la curva de indiferencia **corta** la restricción presupuestaria en el punto elegido?

### 2.5.2. Respuesta

La frase del asesor puede traducirse así: Camila debe elegir horas de trabajo y de ocio de modo que la **tasa marginal de sustitución entre ocio y consumo** sea igual al **salario real**. Si el bien del eje vertical es consumo medido en unidades monetarias o en un bien numeraire, esa condición se escribe simplemente como $\text{TMS}_{\text{ocio,consumo}} = w$. Si existiera además un precio explícito del consumo distinto de 1, entonces la condición más general sería $\text{TMS} = w/p_c$. Aquí usamos la versión simple porque el consumo está medido directamente en unidades comparables con el salario.

#### 2.5.2.1. 1. Condición geométrica de tangencia

En un óptimo interior, la curva de indiferencia es tangente a la restricción presupuestaria. Eso se escribe como:

$$\text{TMS}_{\text{ocio,consumo}} = w.$$

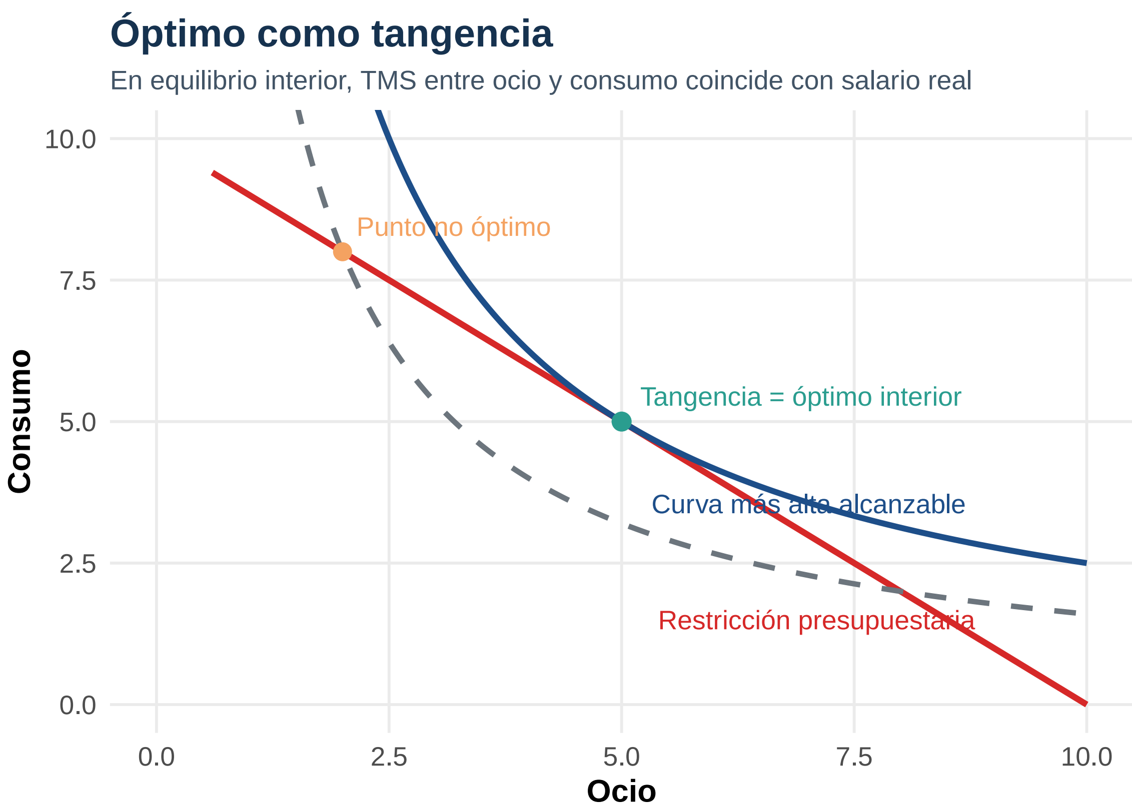
La pendiente de la curva de indiferencia refleja la valoración subjetiva del ocio. La pendiente de la restricción presupuestaria refleja el costo objetivo de tomar más ocio: el salario al que se renuncia.

#### 2.5.2.2. 2. Interpretación económica

Si Camila valorara el ocio **más** que el salario que deja de ganar, le convendría trabajar menos y disfrutar más ocio. Si lo valorara **menos**, le convendría trabajar más. Solo cuando ambas magnitudes coinciden, ya no hay ganancia posible moviéndose a lo largo de la restricción.

#### 2.5.2.3. 3. Si la curva corta la restricción

Si la curva de indiferencia **corta** la restricción en vez de ser tangente, el punto no es un óptimo. En ese caso todavía existe alguna dirección sobre la recta presupuestaria que permite llegar a una curva de indiferencia más alta.




## 2.6. 6. Eficiencia productiva versus eficiencia asignativa

### 2.6.1. Enunciado

> **(Eficiencia productiva versus eficiencia asignativa.)** Una economía opera dentro de su FPP, produciendo en un punto interior. Un funcionario propone que para mejorar el bienestar basta con "producir más eficientemente". Un economista le responde que eso es condición necesaria pero no suficiente. Explique la diferencia entre **eficiencia productiva** (operar sobre la FPP) y **eficiencia asignativa** (elegir el punto correcto sobre la FPP). ¿Por qué para evaluar la eficiencia asignativa se necesita información sobre las preferencias de la sociedad?

### 2.6.2. Respuesta

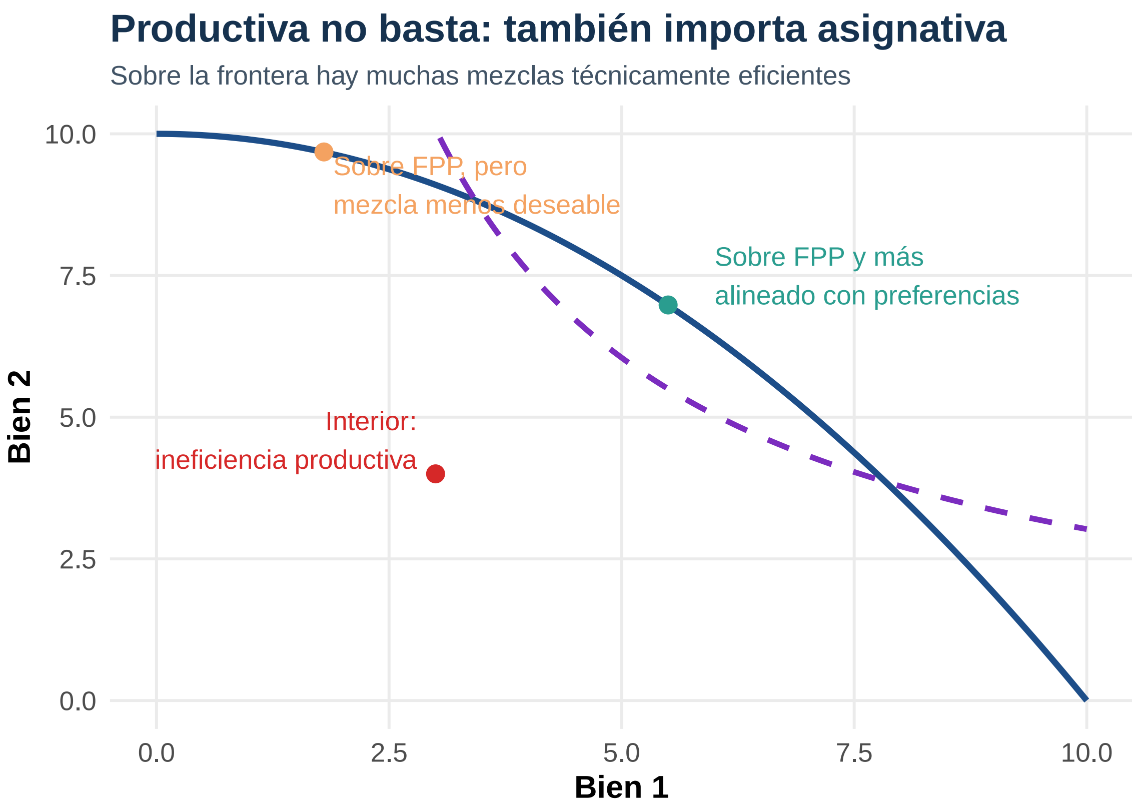
La **eficiencia productiva** significa usar plenamente los recursos disponibles. Geométricamente, eso implica producir **sobre la FPP**. Si la economía está en un punto interior, todavía podría producir más de al menos un bien sin sacrificar el otro: hay recursos o capacidad desaprovechada.

La **eficiencia asignativa** pregunta algo distinto: incluso si la economía ya produce sobre la FPP, ¿está produciendo la combinación de bienes que más valora la sociedad? Sobre la frontera hay muchas combinaciones técnicamente eficientes, pero no todas generan el mismo bienestar social.

Por eso, para evaluar la eficiencia asignativa se necesita información sobre **las preferencias de la sociedad**. La FPP solo dice **qué es posible producir**. No dice cuál de esas combinaciones es socialmente preferible. Para elegir entre puntos sobre la frontera se necesita saber qué bienes valora más la población y qué combinación genera mayor bienestar social.

Tabla 3: Productiva y asignativa responden preguntas distintas

| concepto | pregunta | información necesaria |
|---|---|---|
| Eficiencia productiva | ¿Se usan plenamente los recursos? | Tecnología y dotación de recursos |
| Eficiencia asignativa | ¿Se produce la mezcla correcta de bienes? | Tecnología + preferencias sociales |




## 2.7. 7. Precios relativos como señales de escasez

### 2.7.1. Enunciado

**(Precios relativos como señales de escasez.)** En una economía cerrada, el precio relativo del trigo respecto al acero es 2 (2 toneladas de trigo por 1 tonelada de acero). Al abrirse al comercio internacional, el precio relativo mundial es 4. Un estudiante comenta: “Los precios mundiales no cambian lo que el país puede producir, entonces da igual”. Comente la afirmación. ¿Cómo cambia el conjunto factible de **consumo** (no de producción) cuando el país puede comerciar a precios distintos a sus costos de oportunidad internos? Dibuje esquemáticamente cómo la recta de comercio puede quedar por encima de la FPP.

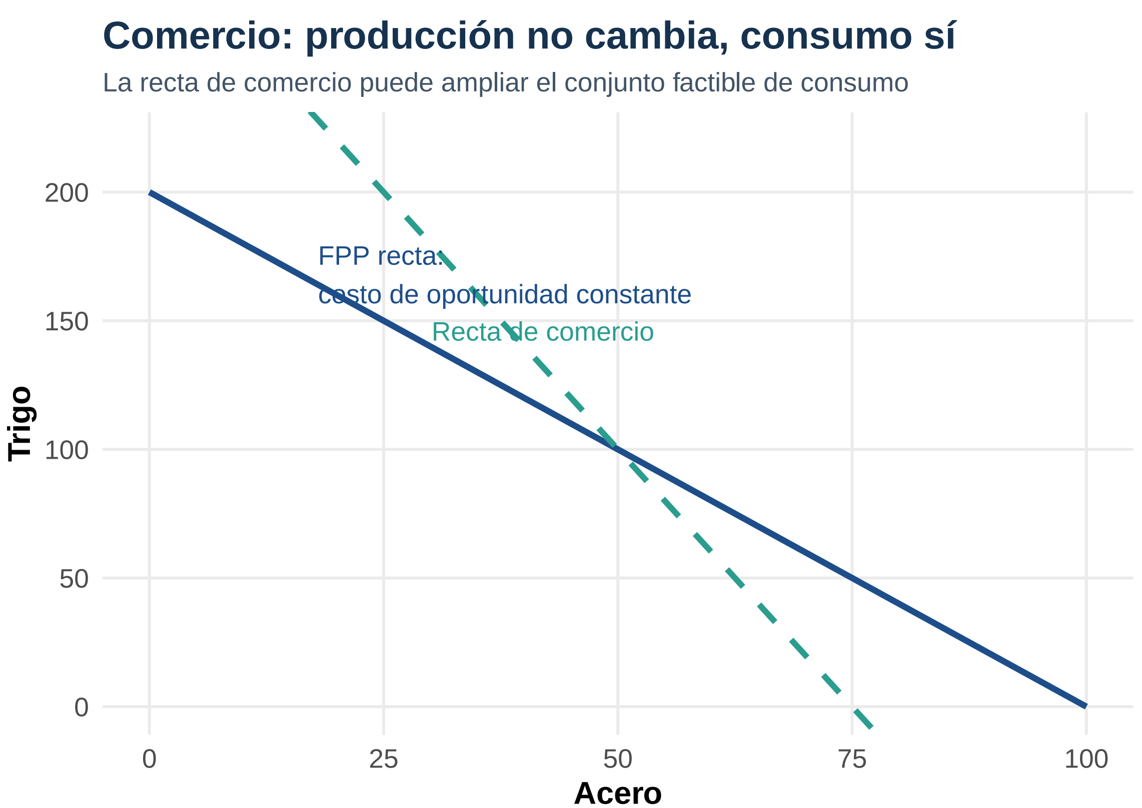
### 2.7.2. Respuesta

La afirmación es incorrecta. Es verdad que abrirse al comercio **no cambia la FPP**: con la misma tecnología y los mismos recursos, el país puede producir exactamente lo mismo que antes.

Pero el comercio sí cambia el conjunto factible de **consumo**. Ahora el país puede producir una canasta, vender parte de ella e intercambiarla por otra a los precios internacionales. Si el precio mundial es más favorable que el costo de oportunidad interno, la recta de comercio puede quedar **por encima de la FPP**. Eso significa que el país no produce más físicamente, pero sí puede **consumir una canasta de mayor valor**.

En este gráfico la FPP aparece como una **recta** porque se está usando un esquema simple con **costo de oportunidad constante**. Eso quiere decir que transformar acero en trigo siempre exige el mismo sacrificio, sin importar en qué punto esté la economía. Cuando ocurre eso, la FPP es lineal y no curva. Si el costo de oportunidad fuera creciente, entonces la FPP sería cóncava. Aquí la recta sirve para aislar la idea central del ejercicio: lo que cambia con el comercio no es la frontera de producción, sino la frontera de consumo.

En este caso, el precio relativo mundial del trigo es más alto que el interno, así que el país puede beneficiarse especializándose relativamente en el bien que se volvió más valioso en el mercado mundial y luego comerciando.



## 2.8. 8. Bienes normales, inferiores e ingreso

### 2.8.1. Enunciado

> **(Bienes normales, inferiores e ingreso.)** Al aumentar su ingreso, María compra más palta y menos fideos. Comente: ¿cómo se desplaza la restricción presupuestaria ante un aumento del ingreso?, ¿qué tipo de bien es la palta para María y qué tipo son los fideos?, y ¿en qué dirección se mueve el óptimo del consumidor en cada caso? Represente ambos casos geométricamente en el plano (palta, fideos).

### 2.8.2. Respuesta

Cuando sube el ingreso y los precios no cambian, la restricción presupuestaria se desplaza **hacia afuera en forma paralela**. Los interceptos aumentan, pero la pendiente se mantiene igual, porque los precios relativos no cambian.

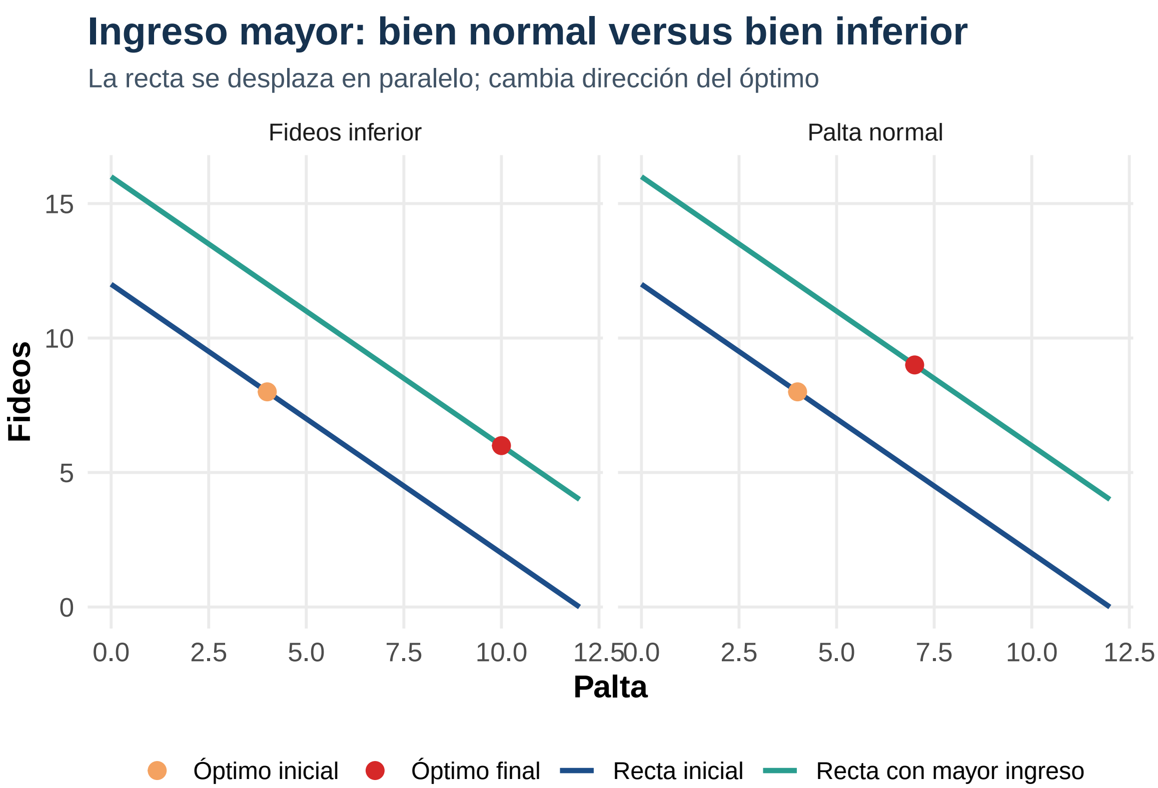
Si María compra **más palta** cuando sube su ingreso, la palta es un **bien normal**. Si compra **menos fideos**, los fideos son un **bien inferior**.

Entonces el óptimo del consumidor se mueve así:

- hacia **más palta** cuando aumenta el ingreso;
- hacia **menos fideos** si los fideos son inferiores.

No significa que los fideos sean "malos"; significa que al mejorar su ingreso, María reemplaza parte del consumo de fideos por bienes que valora más.

En el gráfico, ambas rectas presupuestarias son paralelas porque solo cambia el ingreso. El punto **Antes** está sobre la recta inicial en ambos paneles. En el panel de **Palta normal**, el punto **Después** se mueve hacia arriba y a la derecha sobre la nueva recta: María consume más palta y también más fideos. En el panel de **Fideos inferior**, el punto **Después** también está sobre la nueva recta, pero ahora aparece más a la derecha y más abajo: María compra más palta, pero menos fideos que antes. Ese contraste es justamente la idea del gráfico. Todos los puntos marcados son combinaciones factibles, y los puntos finales se ubican sobre la nueva restricción presupuestaria para reflejar que, con preferencias de no saciedad, el óptimo sigue usando todo el ingreso disponible.




### 2.9. 9. Comparación de asignaciones: Pareto y bienestar social

#### 2.9.1. Enunciado

> **(Comparación de asignaciones: Pareto y bienestar social.)** Una economía pasa de la asignación $X$ a la asignación $Y$. En $X$, Pedro consume $(6, 2)$ y Juan consume $(2, 6)$. En $Y$, ambos consumen $(4, 4)$. Comente si el paso de $X$ a $Y$ constituye una mejora de Pareto, asumiendo que las utilidades son estrictamente crecientes en ambos bienes. ¿Es posible que la sociedad igualitaria prefiera $Y$ a $X$ incluso si el movimiento no es paretiano? ¿Qué herramienta teórica permite hacer ese juicio de valor y cuáles son sus limitaciones?

#### 2.9.2. Respuesta

Una **mejora de Pareto** ocurre solo si al menos una persona mejora y **nadie empeora**. Aquí eso no puede afirmarse de manera automática. Para verlo mejor, conviene mirar qué pasa con cada persona por separado:

- Pedro pasa de $(6, 2)$ a $(4, 4)$: pierde 2 unidades del primer bien, pero gana 2 del segundo.
- Juan pasa de $(2, 6)$ a $(4, 4)$: gana 2 unidades del primer bien, pero pierde 2 del segundo.

Como las utilidades son estrictamente crecientes en ambos bienes, sabemos que "más de ambos" siempre sería mejor. Pero aquí nadie tiene más de ambos bienes al mismo tiempo: cada persona gana en una dimensión y pierde en otra. Por eso no podemos concluir que ambos mejoran. En consecuencia, **no podemos decir que el paso de $X$ a $Y$ sea una mejora de Pareto**.

Esto es importante porque Pareto es un criterio muy exigente: basta con que alguien pueda estar peor para que ya no podamos llamar al cambio una mejora de Pareto. En este caso, el movimiento hacia una distribución más igualitaria puede resultar atractivo desde un punto de vista distributivo, pero eso no lo convierte automáticamente en una mejora paretiana.

Sin embargo, una sociedad igualitarista **sí podría preferir** la asignación $Y$, porque distribuye los bienes de forma más pareja. Para hacer ese juicio se necesita una **función de bienestar social** o algún criterio distributivo explícito. Esa herramienta permite agregar bienestar individual en un criterio social más amplio y decir, por ejemplo, que una sociedad valora positivamente la igualdad aunque alguna persona pierda parte de alguno de los bienes.

La limitación es que ese juicio ya incorpora **valores normativos**. No es una conclusión puramente técnica. Distintas funciones de bienestar social pueden llegar a recomendaciones distintas: una función más igualitarista podría preferir $Y$, mientras que otra más enfocada en libertades individuales o en eficiencia estricta podría no hacerlo.

Tabla 4: La asignación Y es más igualitaria, pero no necesariamente paretiana

| asignación | persona | bien_1 | bien_2 |
|---|---|---|---|
| X | Pedro | 6 | 2 |
| X | Juan | 2 | 6 |
| Y | Pedro | 4 | 4 |
| Y | Juan | 4 | 4 |

## 2.10. 10. Ventaja comparativa y especialización

### 2.10.1. Enunciado

**(Ventaja comparativa y especialización.)** El país A puede producir 100 toneladas de trigo o 50 aviones con sus recursos totales. El país B puede producir 60 toneladas de trigo o 60 aviones. Un periodista escribe: "Como B produce más aviones que A en términos absolutos, A no tiene nada que ganar del comercio con B". Comente la afirmación utilizando el concepto de **ventaja comparativa**: ¿quién tiene ventaja comparativa en cada bien?, ¿cómo se determina eso a partir de los costos de oportunidad internos?, y ¿por qué ambos países pueden beneficiarse del comercio incluso cuando uno es absolutamente más productivo en ambos bienes?

### 2.10.2. Respuesta

La afirmación del periodista es incorrecta porque el comercio no depende de la **ventaja absoluta**, sino de la **ventaja comparativa**, es decir, del costo de oportunidad interno.

Conviene calcular ambos costos de oportunidad en los dos países.

Para el país A:

- si produce 100 toneladas de trigo o 50 aviones, entonces dedicar recursos a 1 avión implica renunciar a 2 toneladas de trigo;
- equivalentemente, producir 1 tonelada de trigo implica renunciar a 0,5 aviones.

Para el país B:

- si produce 60 toneladas de trigo o 60 aviones, entonces 1 avión cuesta 1 tonelada de trigo;
- equivalentemente, 1 tonelada de trigo cuesta 1 avión.

Comparando:

- **B** tiene ventaja comparativa en **aviones** porque sacrifica menos trigo por cada avión;
- **A** tiene ventaja comparativa en **trigo** porque sacrifica menos aviones por cada unidad de trigo.

Aquí aparece la idea central: **ventaja absoluta** y **ventaja comparativa** no son lo mismo. Un país puede ser más productivo en términos absolutos en uno o en ambos bienes, y aun así no tener ventaja comparativa en todos ellos. Lo que importa para el comercio no es quién produce más, sino **quién sacrifica menos del otro bien** cuando produce una unidad adicional.

Por eso ambos países pueden beneficiarse del comercio. Si cada uno se especializa relativamente en el bien en el que tiene menor costo de oportunidad y luego intercambia, ambos pueden acceder a combinaciones de consumo más convenientes que en autarquía. En resumen, el comercio convierte diferencias en costos relativos en una fuente de ganancia mutua, incluso cuando uno de los países parece "más fuerte" en términos absolutos.

Tabla 5: La clave es el costo de oportunidad, no la ventaja absoluta

| país | 1 avión cuesta | 1 trigo cuesta | Ventaja comparativa |
|---|---|---|---|
| A | 2 trigo | 0,5 aviones | Trigo |
| B | 1 trigo | 1 avión | Aviones |

# 3. Parte II. Matemático I: Optimización sobre la FPP

En este problema la economía enfrenta una restricción de recursos: no puede producir cantidades ilimitadas de ambos bienes al mismo tiempo. Por eso, producir más alimentos ($A$) obliga a sacrificar parte de la vestimenta ($V$), y esa relación se representa mediante la Frontera de Posibilidades de Producción (FPP). En este caso, además, la FPP muestra que al aumentar la producción de alimentos, la producción de vestimenta disminuye a una tasa creciente, lo que refleja un costo de oportunidad creciente. Al mismo tiempo, la función de utilidad social indica que la sociedad valora ambos bienes, de modo que el bienestar es mayor cuando existe una combinación equilibrada entre alimentos y vestimenta, y no cuando toda la producción se concentra en uno solo. En la expresión $U(A, V) = A^{1/2}V^{1/2}$, el exponente $1/2$ equivale a raíz cuadrada, es decir, $A^{1/2} = \sqrt{A}$ y $V^{1/2} = \sqrt{V}$; por tanto, la función puede interpretarse como el producto entre la raíz cuadrada de $A$ y la raíz cuadrada de $V$. El objetivo del ejercicio es encontrar el punto sobre la FPP donde se alcanza el mayor nivel posible de bienestar social, lo que ocurre en el punto donde la FPP es tangente a la curva de utilidad más alta alcanzable: ahí se logra el mejor equilibrio entre ambos bienes dados los recursos disponibles.

## 3.1. Contexto y preparación

### 3.1.1. Enunciado general

**Contexto.** Una economía produce dos bienes: **alimentos** ($A$) y **vestimenta** ($V$). Los recursos totales son fijos. La Frontera de Posibilidades de Producción viene dada por:

$$V = 10 - \frac{1}{4}A^2, \qquad A \in [0, \sqrt{40}].$$

El bienestar social se representa mediante la función de utilidad social:

$$U(A, V) = A^{1/2}V^{1/2}.$$

El objetivo es encontrar la combinación $(A^*, V^*)$ sobre la FPP que maximiza el bienestar social, e interpretar el resultado geométricamente.

## 3.2. 1. Geometría de la FPP

### 3.2.1. Enunciado

**1. (Geometría de la FPP.)** Grafique la FPP en el plano $(A, V)$, con $A$ en el eje horizontal.
**(a)** Calcule los interceptos: ¿cuánto de $V$ produce la economía si $A = 0$, y cuánto de $A$ si $V = 0$?
**(b)** Calcule la pendiente $dV/dA$ de la FPP. ¿Es constante o varía con $A$? ¿Qué nos dice el signo y la magnitud de esta pendiente sobre el costo de oportunidad de producir una unidad adicional de $A$?
**(c)** Indique si la FPP es cóncava o convexa hacia el origen y explique la intuición económica detrás de esa forma.

### 3.2.2. Desarrollo

Partimos de

$$V = 10 - \frac{1}{4}A^2.$$

#### 3.2.2.1. (a) Interceptos

Si $A = 0$:

$$V = 10.$$

Si $V = 0$:

$$0 = 10 - \frac{1}{4}A^2 \quad \Longrightarrow \quad A^2 = 40 \quad \Longrightarrow \quad A = \sqrt{40} \approx 6,32.$$

#### 3.2.2.2. (b) Pendiente

Derivando respecto de $A$:

$$\frac{dV}{dA} = -\frac{A}{2}.$$

La pendiente es:

- **negativa**, porque para producir más alimentos hay que sacrificar vestimenta;

- **variable**, porque depende de $A$;
- **creciente en valor absoluto** cuando $A$ aumenta, lo que indica costo de oportunidad creciente de producir alimentos.

La expresión $dV/dA$ puede leerse de forma muy simple, sin pensar todavía en cálculo avanzado. La idea es que $dA$ representa un cambio pequeño en la producción de alimentos, y $dV$ representa el cambio asociado en la producción de vestimenta. Por eso, $dV/dA$ se interpreta como "cuánto cambia $V$ cuando $A$ cambia un poco", es decir, cuánto vestuario se debe sacrificar para producir una unidad adicional de alimentos. Esta razón corresponde a la pendiente de la FPP en cada punto. En este ejercicio no es constante, porque depende de $A$: a medida que la economía produce más alimentos, el costo de oportunidad va cambiando. El signo negativo indica justamente que existe un trade-off entre ambos bienes: producir más de uno implica producir menos del otro. Además, como la pendiente aumenta en magnitud cuando $A$ crece, eso muestra que el costo de oportunidad es creciente. Por ejemplo, usando la FPP $V = 10 - \frac{1}{4}A^2$, si $A$ pasa de 2 a 3, entonces $V$ pasa de 9 a 7,75. Eso significa que al aumentar $A$ en 1 unidad, la producción de vestimenta disminuye en 1,25 unidades. Esta es la forma práctica de interpretar $dV/dA$. La intuición es que al comienzo es relativamente fácil reasignar recursos hacia alimentos, pero a medida que esa producción se intensifica, hay que usar recursos menos adecuados para ese sector, y por eso cada unidad adicional de alimentos exige sacrificar más vestimenta.

#### 3.2.2.3. (c) Forma de la FPP

La segunda derivada es

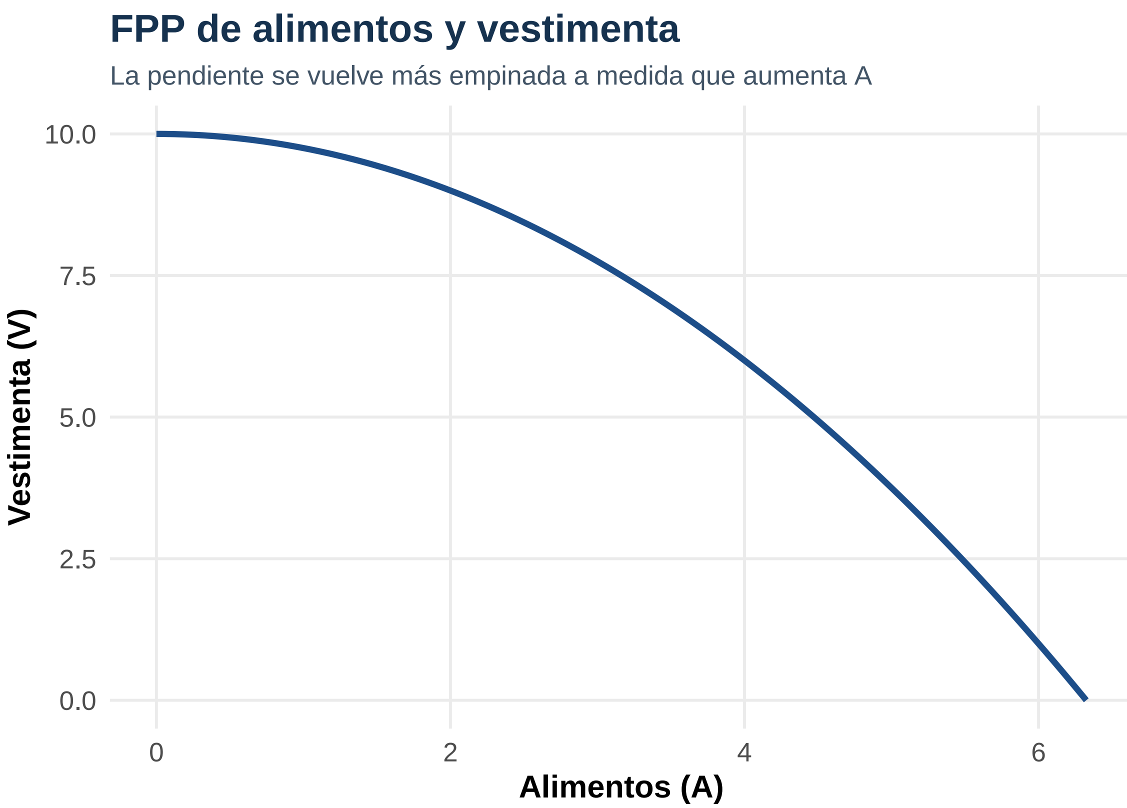
$$\frac{d^2V}{dA^2} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Eso muestra que la FPP es **cóncava hacia el origen**. La intuición económica es la habitual: a medida que la economía reasigna recursos hacia alimentos, debe usar factores cada vez menos adecuados para producirlos, por lo que sacrifica más vestimenta por cada unidad extra de alimentos.

La expresión $d^2V/dA^2$ no significa que $V$ esté "elevado al cuadrado". Lo que indica es que estamos derivando dos veces respecto de $A$. Mientras la primera derivada, $dV/dA$, mide la pendiente de la FPP —es decir, cuánto cambia $V$ cuando cambia $A$—, la segunda derivada, $d^2V/dA^2$, mide cómo va cambiando esa pendiente a medida que $A$ varía. En este caso, como la segunda derivada es negativa, eso quiere decir que la pendiente se vuelve cada vez más negativa, y por eso la FPP toma una forma cóncava hacia el origen. La interpretación económica es que, a medida que aumenta la producción de alimentos, la economía debe sacrificar cada vez más vestimenta por cada unidad adicional, lo que refleja un costo de oportunidad creciente. La intuición es simple: al comienzo se usan los recursos más adecuados para producir alimentos, pero cuando esa producción sigue aumentando, hay que emplear recursos menos eficientes para ese sector, y entonces el sacrificio en términos de vestimenta se vuelve cada vez mayor.

Tabla 6: Resumen geométrico de la FPP

| objeto | valor |
|---|---|
| Intercepto vertical | V = 10 cuando A = 0 |
| Intercepto horizontal | A = 6,32 cuando V = 0 |
| Pendiente | dV/dA = -A/2 |
| Forma | Cóncava hacia el origen |




## 3.3. 2. Curvas de indiferencia social

### 3.3.1. Enunciado

**2. (Curvas de indiferencia social.)** Para la función $U(A, V) = A^{1/2}V^{1/2}$:
**(a)** Despeje $V$ en función de $A$ para un nivel de utilidad dado $\bar{U}$ y grafique tres curvas de indiferencia ($\bar{U} = 2, 4, 6$) sobre el mismo plano que la FPP.
**(b)** Calcule la Tasa Marginal de Sustitución TMS $= -dV/dA$ a lo largo de una

curva de indiferencia. ¿La TMS es decreciente en $A$? ¿Qué implica eso sobre la convexidad de las preferencias?
**(c)** Explique con palabras por qué las curvas de indiferencia más altas son preferibles y en qué dirección hay que moverse en el plano para alcanzar mayor bienestar.

### 3.3.2. Desarrollo

#### 3.3.2.1. (a) Despeje de las curvas de indiferencia

Para un nivel fijo de utilidad $\bar{U}$,

$$A^{1/2}V^{1/2} = \bar{U}.$$

Elevando al cuadrado:

$$AV = \bar{U}^2.$$

Entonces,

$$V = \frac{\bar{U}^2}{A}.$$

Esa es la ecuación general de las curvas de indiferencia.

Si usamos los niveles pedidos en el ejercicio, se obtiene:

$$\bar{U} = 2 \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{4}{A}$$

$$\bar{U} = 4 \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{16}{A}$$

$$\bar{U} = 6 \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{36}{A}$$

Estas son justamente las tres curvas que luego aparecen dibujadas en el gráfico. A medida que sube $\bar{U}$, la curva queda más arriba, porque representa un mayor nivel de bienestar social.

Para graficarlas no necesitamos fijar un único valor de $A$. Lo que hacemos es dejar que $A$ recorra muchos valores posibles dentro del intervalo relevante del problema. Como la FPP impone que $A \in [0, \sqrt{40}] \approx [0, 6{,}32]$, ese es el rango natural para dibujar. Entonces, para cada valor de $A$, calculamos el valor correspondiente de $V$ usando la ecuación de la curva de indiferencia. Por ejemplo, si $\bar{U} = 2$, la curva es $V = 4/A$. Si tomamos $A = 1$, resulta $V = 4$; si $A = 2$, resulta

$V = 2$; y si $A = 4$, resulta $V = 1$. Todos esos puntos pertenecen a la misma curva. Al repetir este procedimiento para muchos valores de $A$, se obtiene la curva completa. La única precaución es no usar $A = 0$, porque ahí habría división por cero, y por eso en el gráfico se empieza desde un valor pequeño positivo.

#### 3.3.2.2. (b) TMS

A lo largo de una curva de indiferencia,

$$\text{TMS} = -\frac{dV}{dA} = \frac{V}{A}.$$

Como sobre la misma curva $V = \bar{U}^2/A$, se obtiene

$$\text{TMS} = \frac{\bar{U}^2}{A^2}.$$

Por tanto, la TMS **disminuye** cuando aumenta $A$. Esto implica que las preferencias son **convexas al origen**: a medida que los alimentos se vuelven relativamente abundantes, la sociedad está dispuesta a sacrificar cada vez menos vestimenta por una unidad adicional de alimentos.

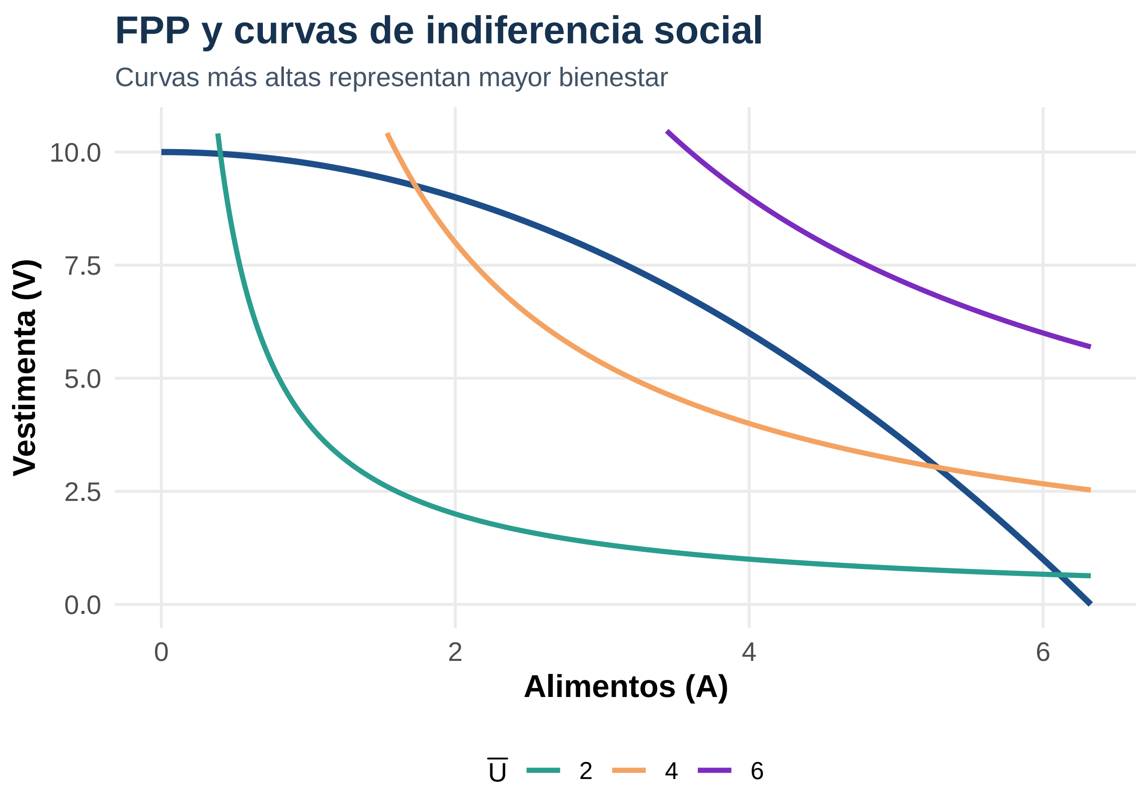
La Tasa Marginal de Sustitución, escrita como $\text{TMS} = -dV/dA$, puede interpretarse de manera sencilla como la cantidad de vestimenta ($V$) que la sociedad está dispuesta a sacrificar para obtener una unidad adicional de alimentos ($A$), manteniendo el mismo nivel de bienestar. En este ejercicio, para la función $U(A, V) = A^{1/2}V^{1/2}$, la TMS es igual a $V/A$. Esto significa que la disposición a intercambiar un bien por otro depende de las cantidades disponibles de ambos bienes, por lo que no es constante. En particular, cuando aumenta $A$ y la utilidad se mantiene fija, la razón $V/A$ disminuye, lo que indica que la sociedad está dispuesta a sacrificar cada vez menos vestimenta por una unidad adicional de alimentos.

Por ejemplo, si $A = 2$ y $V = 8$, entonces $\text{TMS} = 8/2 = 4$, lo que significa que la sociedad estaría dispuesta a sacrificar 4 unidades de vestimenta por una unidad adicional de alimentos. En cambio, si $A = 4$ y $V = 4$, entonces $\text{TMS} = 4/4 = 1$, por lo que el sacrificio es menor. A lo largo de una curva de indiferencia, la Tasa Marginal de Sustitución se define como $\text{TMS} = -dV/dA = V/A$. Para analizar cómo cambia la TMS cuando varía $A$, usamos la ecuación de la curva de indiferencia. Dado que la función de utilidad es $U(A, V) = A^{1/2}V^{1/2}$, al fijar un nivel de utilidad constante $\bar{U}$ se tiene que $\bar{U}^2 = A \cdot V$, de donde se despeja $V = \bar{U}^2/A$. Sustituyendo esta expresión en la TMS, se obtiene $\text{TMS} = V/A = (\bar{U}^2/A)/A = \bar{U}^2/A^2$. Esta expresión muestra con claridad que la TMS depende de $A$ y no es constante. En particular, a medida que $A$ aumenta, el denominador $A^2$ crece y por eso la TMS disminuye.

En términos económicos, esto significa que, manteniendo constante el nivel de bienestar, la sociedad está dispuesta a sacrificar cada vez menos vestimenta por una unidad adicional de alimentos. Este comportamiento refleja preferencias convexas hacia el origen, es decir, una preferencia por combinaciones más equilibradas de ambos bienes. En otras palabras, la TMS decreciente implica que las curvas de indiferencia son convexas hacia el origen y no favorecen concentrar todo el bienestar en un solo bien.

#### 3.3.2.3. (c) Dirección de mayor bienestar

Las curvas de indiferencia más altas son preferibles porque representan un mayor valor de $U$. Para alcanzar más bienestar hay que moverse hacia el **noreste** del plano: más alimentos y más vestimenta.




## 3.4. 3. Condición de óptimo y su interpretación

### 3.4.1. Enunciado

> **3. (Condición de óptimo y su interpretación.)** El óptimo $(A^*, V^*)$ se encuentra donde la curva de indiferencia más alta es **tangente** a la FPP.

**(a)** Escriba la condición de tangencia igualando la TMS al valor absoluto de la pendiente de la FPP. Interprete: ¿qué dice esta condición sobre la valoración subjetiva de los bienes versus su costo de oportunidad productivo?
**(b)** Resuelva el sistema formado por la condición de tangencia y la ecuación de la FPP para obtener $A^*$ y $V^*$.
**(c)** Calcule $U^* = U(A^*, V^*)$. Señale el óptimo en el gráfico e identifique la curva de indiferencia tangente.

### 3.4.2. Desarrollo

#### 3.4.2.1. (a) Condición de tangencia

Sabemos que:

$$\text{TMS} = \frac{V}{A} \qquad \text{y} \qquad \left|\frac{dV}{dA}\right| = \frac{A}{2}.$$

En lenguaje simple, estas dos expresiones representan dos cosas distintas. La TMS mide la **valoración subjetiva** de la sociedad: cuánta vestimenta está dispuesta a sacrificar por obtener más alimentos sin cambiar su nivel de bienestar. En cambio, la pendiente de la FPP mide el **costo de oportunidad productivo**: cuánta vestimenta se debe sacrificar realmente para producir más alimentos con los recursos disponibles. En el óptimo, ambas deben coincidir. Si la sociedad estuviera dispuesta a sacrificar más vestimenta de la que realmente cuesta producir alimentos, convendría producir más $A$. Si estuviera dispuesta a sacrificar menos de lo que cuesta producirlos, convendría producir menos $A$. El equilibrio aparece justo cuando ambas magnitudes son iguales.

En el óptimo interior:

$$\frac{V}{A} = \frac{A}{2}.$$

Interpretación: la valoración subjetiva de una unidad adicional de alimentos en términos de vestimenta debe coincidir con el costo de oportunidad productivo de obtenerla.

#### 3.4.2.2. (b) Solución de $A^*$ y $V^*$

A partir de la condición de tangencia, podemos reordenar la igualdad para obtener una relación que **debe cumplirse en el óptimo**. Todavía no es el resultado final, sino una condición intermedia que luego combinaremos con la FPP para encontrar el punto específico $(A^*, V^*)$.

De la condición de tangencia:

$$V = \frac{A^2}{2}.$$

Ahora combinamos esa condición de óptimo con la restricción productiva, es decir, con la FPP. De ese modo encontramos el único punto que cumple al mismo tiempo con producir eficientemente y con maximizar el bienestar social.

Sustituyendo en la FPP:

$$\frac{A^2}{2} = 10 - \frac{1}{4}A^2.$$

Entonces:

$$\frac{3}{4}A^2 = 10 \quad \Longrightarrow \quad A^2 = \frac{40}{3} \quad \Longrightarrow \quad A^* = \sqrt{\frac{40}{3}} \approx 3,65.$$

Luego,

$$V^* = 10 - \frac{(A^*)^2}{4} = 10 - \frac{10}{3} = \frac{20}{3} \approx 6,67.$$

#### 3.4.2.3. (c) Utilidad máxima

$$U^* = \sqrt{A^* V^*} \approx 4,93.$$

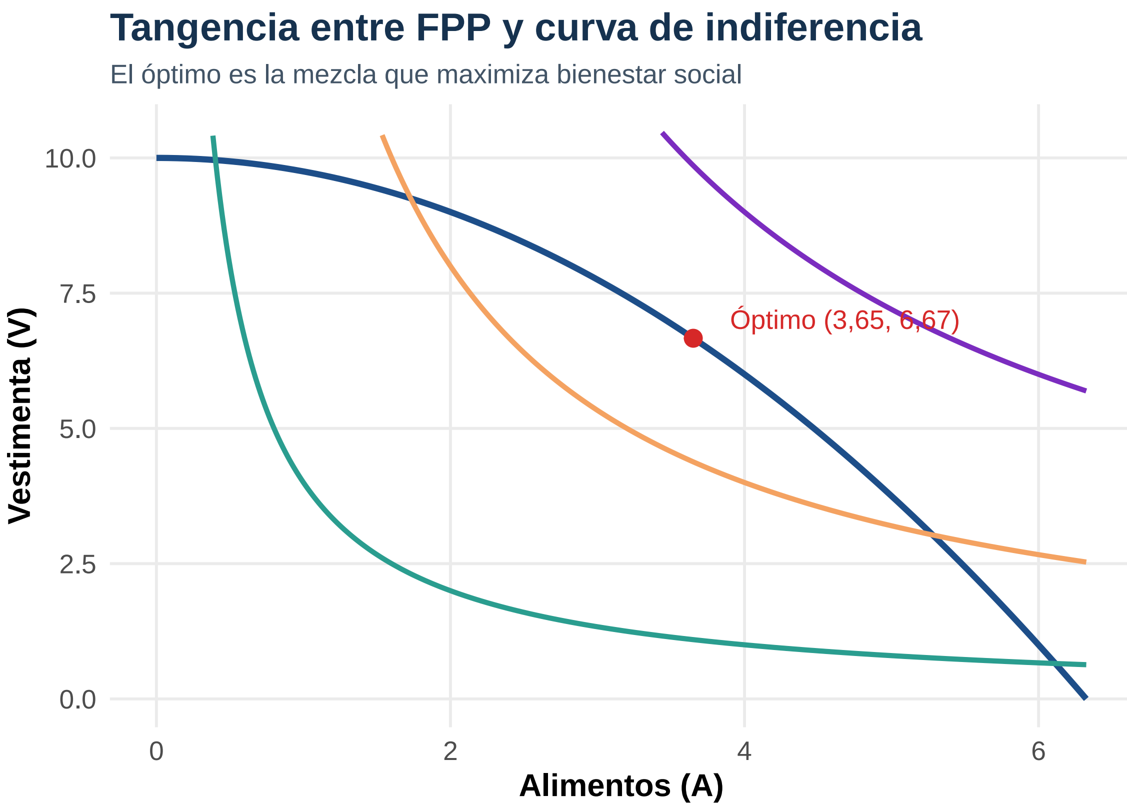
Económicamente, la combinación $(A^*, V^*)$ representa la canasta factible que maximiza el bienestar social dado el límite de recursos de la economía. Es el punto donde la curva de indiferencia más alta que todavía puede alcanzarse toca exactamente a la FPP. Por eso este punto resume el mejor equilibrio posible entre alimentos y vestimenta.

En síntesis, el óptimo aparece cuando la valoración subjetiva de los bienes coincide con su costo de oportunidad productivo. En ese punto, no es posible mejorar el bienestar social simplemente cambiando la mezcla productiva, porque cualquier movimiento sobre la FPP alejaría a la economía de la mejor combinación alcanzable.

Tabla 7: Óptimo sobre la FPP

| magnitud | valor |
|---|---|
| A* | 3,65 |
| V* | 6,67 |
| U* | 4,93 |

| magnitud | valor |
| --- | --- |




## 3.5. 4. Análisis de eficiencia

### 3.5.1. Enunciado

**4. (Análisis de eficiencia.)**
**(a)** Evalúe $U(A, V)$ en el punto $(2, 9)$. ¿Es este punto factible? ¿Es un óptimo? Compare con $U^*$.
**(b)** Considere el punto $(0{,}5A^*, 0{,}5V^*)$. ¿Es factible? ¿Qué dice esto sobre operar en el **interior** del conjunto factible?
**(c)** ¿Podría la economía aumentar su bienestar simplemente cambiando la mezcla productiva sin cambiar su dotación de recursos? Explique.

### 3.5.2. Desarrollo

#### 3.5.2.1. (a) Punto $(2, 9)$

La utilidad es

$$U(2, 9) = \sqrt{2 \cdot 9} = \sqrt{18} \approx 4,24.$$

Para ver si es factible, revisamos la FPP cuando $A = 2$:

$$V = 10 - \frac{2^2}{4} = 9.$$

Entonces $(2, 9)$ está **sobre la FPP**, así que es factible y productivamente eficiente. Pero **no es óptimo**, porque entrega menos utilidad que $U^* \approx 4,93$.

Aquí conviene distinguir tres ideas. Un punto es **factible** si puede producirse con los recursos disponibles. Es **productivamente eficiente** si está sobre la FPP, es decir, si usa completamente esos recursos. Pero ser productivamente eficiente no basta para ser **óptimo**: también hay que estar en la combinación que maximiza el bienestar social. En otras palabras, producir al máximo no implica necesariamente producir lo mejor posible.

#### 3.5.2.2. (b) Punto interior

El punto $(0{,}5A^*, 0{,}5V^*)$ es

$$(1,83, 3,33).$$

Ese punto es factible porque está dentro del conjunto factible. Pero al estar en el interior, significa que la economía no usa completamente su capacidad productiva.

Los puntos dentro de la FPP son ineficientes desde el punto de vista productivo porque muestran que la economía podría producir más de ambos bienes, o al menos más de uno sin reducir el otro, si organizara mejor el uso de sus recursos. Por eso decimos que en el interior hay desperdicio de capacidad productiva: todavía existe espacio para acercarse a la frontera y mejorar.

#### 3.5.2.3. (c) ¿Puede mejorar solo cambiando la mezcla?

Sí. Si la economía produce una combinación factible pero no óptima, puede aumentar el bienestar social **sin cambiar tecnología ni recursos**, simplemente moviéndose hacia la combinación correcta sobre la FPP.

En síntesis, los puntos dentro de la FPP representan **ineficiencia productiva** porque no se están usando plenamente los recursos. Los puntos sobre la FPP representan **eficiencia productiva** porque la economía ya está produciendo al máximo de sus posibilidades. Pero solo el punto de tangencia $(A^*, V^*)$ representa además **eficiencia asignativa**, porque es la combinación que maximiza el bienestar social dado ese límite de recursos.

Tabla 8: Comparación entre puntos factibles

| punto | A | V | utilidad | factible | ¿óptimo? |
|---|---|---|---|---|---|
| Óptimo | 3,65 | 6,67 | 4,93 | Sí | Sí |
| (2,9) | 2,00 | 9,00 | 4,24 | Sí | No |
| (0,5A, *0,5V*) | 1,83 | 3,33 | 2,47 | Sí | No |

# 4. Parte III. Matemático II: Optimización con restricción presupuestaria

## 4.1. Contexto y preparación

Antes de resolver el problema, conviene entender qué significa trabajar con una función de utilidad Cobb-Douglas. Cuando escribimos $U(x, y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha}$, estamos diciendo que el consumidor valora ambos bienes y que su bienestar depende de la combinación entre ellos, no solo de consumir mucho de uno solo. Estas preferencias tienen dos rasgos clave: primero, "más es mejor", porque consumir más de cualquiera de los bienes aumenta la utilidad; segundo, existe una preferencia por combinaciones relativamente equilibradas, lo que se refleja en curvas de indiferencia convexas al origen. En este tipo de función, el parámetro $\alpha$ mide la importancia relativa del bien $x$, mientras que $1 - \alpha$ mide la del bien $y$. Además, la Tasa Marginal de Sustitución no es constante: depende de la canasta que se está consumiendo. Para una Cobb-Douglas, se cumple que TMS $= \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{y}{x}$, de modo que cuando el consumidor ya tiene mucho de $x$, está dispuesto a sacrificar cada vez menos de $y$ por una unidad adicional de $x$. Por eso estas preferencias representan bien la idea de utilidad marginal decreciente y de gusto por variedades más balanceadas. Una ventaja muy importante de este tipo de utilidad es que el óptimo puede interpretarse con mucha claridad: el consumidor elige la canasta donde su valoración subjetiva de intercambiar un bien por otro coincide con la relación de precios del mercado. En otras palabras, el punto óptimo aparece cuando la pendiente de la curva de indiferencia es igual a la pendiente de la restricción presupuestaria. En este ejercicio trabajaremos con el caso particular

$U(x,y) = x^{2/3}y^{1/3}$, lo que significa que el bien $x$ tiene un peso relativamente mayor en las preferencias. Eso también implica que, en el óptimo, Valentina destinará una mayor fracción de su ingreso a $x$ que a $y$. En efecto, una propiedad muy útil de las preferencias Cobb-Douglas es que permiten obtener demandas óptimas simples: en general, el consumidor gasta la fracción $\alpha$ de su ingreso en $x$ y la fracción $1-\alpha$ en $y$. Por eso este tipo de utilidad no solo es útil para hacer cuentas, sino también para entender con claridad cómo se relacionan preferencias, precios, ingreso y elección óptima.

### 4.1.1. Enunciado general

**Contexto.** Valentina tiene un ingreso semanal $m = 120$ que gasta íntegramente en dos bienes: comida ($x$) a precio $p_x = 4$ y entretenimiento ($y$) a precio $p_y = 6$. Sus preferencias se representan mediante:

$$U(x,y) = x^{2/3}y^{1/3}.$$

## 4.2. 1. Geometría de la restricción presupuestaria

### 4.2.1. Enunciado

**1. (Geometría de la restricción presupuestaria.)**
**(a)** Escriba la restricción presupuestaria de Valentina. Despeje $y$ en función de $x$ y grafique la recta presupuestaria en el plano $(x,y)$, indicando los interceptos.
**(b)** ¿Cuál es la pendiente de la recta presupuestaria? Interprete económicamente: ¿cuántas unidades de $y$ debe sacrificar Valentina para obtener una unidad adicional de $x$?
**(c)** Si el precio de $x$ sube a $p_x = 6$, ¿cómo cambia la recta presupuestaria? Grafique la nueva recta y describa el efecto sobre el conjunto factible de consumo.

### 4.2.2. Desarrollo

#### 4.2.2.1. (a) Restricción e interceptos

La restricción presupuestaria es

$$4x + 6y = 120.$$

Despejando $y$:

$$y = 20 - \frac{2}{3}x.$$

Interceptos:

- si $x = 0$, entonces $y = 20$;
- si $y = 0$, entonces $x = 30$.

#### 4.2.2.2. (b) Pendiente

La pendiente es

$$-\frac{p_x}{p_y} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Interpretación: para obtener una unidad adicional de comida, Valentina debe renunciar a **2/3 de una unidad de entretenimiento**.

También puede verse la pendiente usando los interceptos de la recta. Como el intercepto vertical es 20 y el horizontal es 30, se obtiene:

$$-\frac{20}{30} = -\frac{2}{3}.$$

Eso entrega exactamente el mismo valor. Sin embargo, en economía conviene escribir la pendiente como $-p_x/p_y$ porque esa forma muestra de inmediato su significado económico: la pendiente depende de los **precios relativos**. En otras palabras, $-4/6$ y $-20/30$ son equivalentes matemáticamente, pero $-4/6$ deja más claro que el costo de oportunidad de consumir una unidad adicional de $x$ viene dado por la relación entre el precio de $x$ y el precio de $y$.

#### 4.2.2.3. (c) Aumento en el precio de $x$

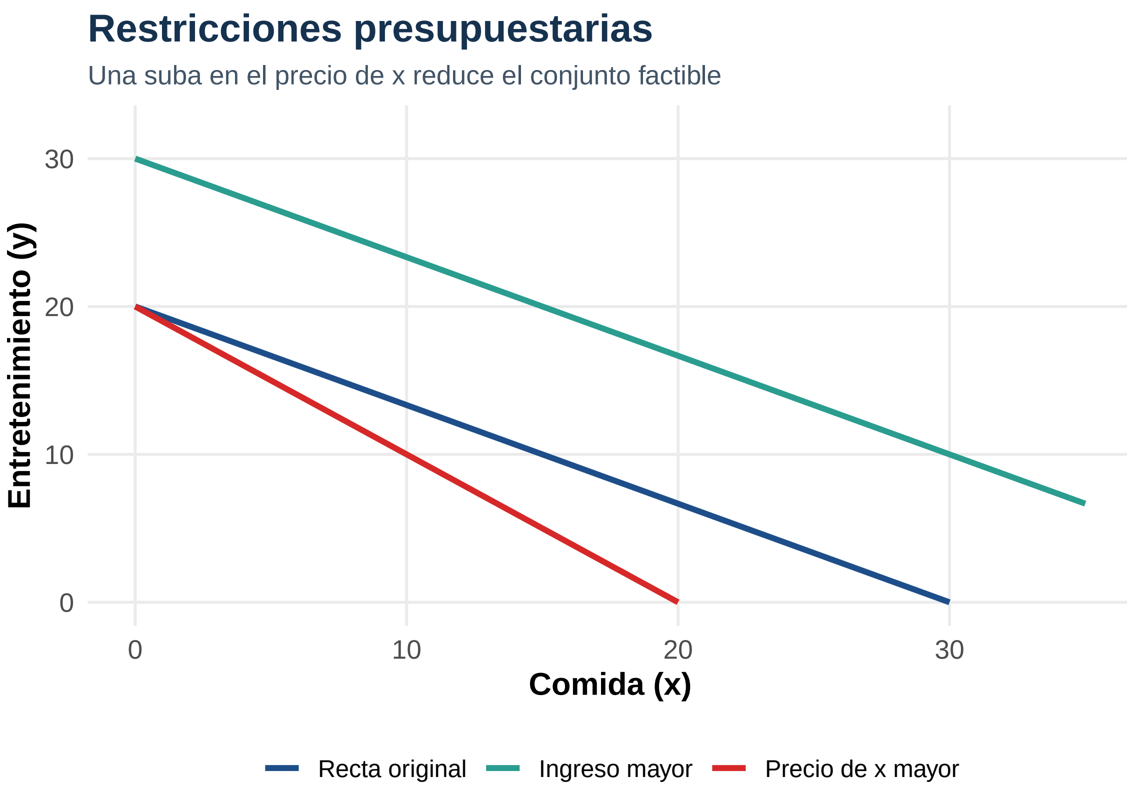
Si $p_x$ sube a 6, la nueva restricción es

$$6x + 6y = 120 \quad \Longrightarrow \quad y = 20 - x.$$

La recta gira hacia adentro alrededor del intercepto vertical. El conjunto factible se reduce porque la comida ahora es más cara.

Tabla 9: Rectas presupuestarias relevantes

| escenario | ecuación | intercepto_x | intercepto_y | pendiente |
|---|---|---|---|---|
| Inicial | 4x + 6y = 120 | 30,00 | 20,00 | -0,67 |
| Precio de x = 6 | 6x + 6y = 120 | 20,00 | 20,00 | -1,00 |




## 4.3. 2. Preferencias y TMS

### 4.3.1. Enunciado

**2. (Preferencias y TMS.)**
**(a)** Para $U = x^{2/3}y^{1/3}$, calcule la TMS $= -dy/dx$ a lo largo de una curva de indiferencia.
**(b)** Evalúe la TMS en los puntos $(6, 12)$ y $(12, 6)$. ¿Qué le dice a Valentina este resultado sobre cómo cambia su disposición a sustituir $y$ por $x$ a medida que consume más $x$?

**(c)** ¿Las curvas de indiferencia de Valentina son convexas al origen? Justifique usando la TMS.

### 4.3.2. Desarrollo

Partimos de la función de utilidad:

$$U = x^{2/3}y^{1/3}.$$

#### 4.3.2.1. 1. Qué significan $UM_x$ y $UM_y$

La utilidad marginal de $x$, escrita como $UM_x$, mide cuánto cambia la utilidad si aumenta un poco el consumo de $x$, manteniendo $y$ fijo. De forma análoga, la utilidad marginal de $y$, escrita como $UM_y$, mide cuánto cambia la utilidad si aumenta un poco el consumo de $y$, manteniendo $x$ fijo.

En términos matemáticos, ambas se calculan con derivadas parciales:

$$UM_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad UM_y = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

#### 4.3.2.2. 2. Calcular $UM_x$

Partimos de:

$$U = x^{2/3}y^{1/3}.$$

Para derivar respecto de $x$, tratamos a $y^{1/3}$ como una constante. Entonces:

$$UM_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{2/3}y^{1/3}\right).$$

Sacamos la constante $y^{1/3}$:

$$UM_x = y^{1/3}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{2/3}\right).$$

Aplicamos la regla de la potencia:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{2/3}\right) = \frac{2}{3}x^{-1/3}.$$

Entonces:

$$UM_x = \frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3}.$$

#### 4.3.2.3. 3. Calcular $UM_y$

Ahora derivamos respecto de $y$, tratando a $x^{2/3}$ como constante:

$$UM_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^{2/3}y^{1/3}\right).$$

Sacamos la constante $x^{2/3}$:

$$UM_y = x^{2/3}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{1/3}\right).$$

Aplicamos la regla de la potencia:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{1/3}\right) = \frac{1}{3}y^{-2/3}.$$

Entonces:

$$UM_y = \frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3}.$$

#### 4.3.2.4. 4. Formar la TMS

La Tasa Marginal de Sustitución entre $y$ y $x$ se calcula como:

$$\text{TMS}_{yx} = \frac{UM_x}{UM_y}.$$

En muchos cursos también se interpreta como la pendiente en valor absoluto de la curva de indiferencia, es decir, $-dy/dx$.

Sustituimos las dos utilidades marginales:

$$\text{TMS}_{yx} = \frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3}}{\frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3}}.$$

Ahora simplificamos paso a paso:

$$\frac{2}{3} \div \frac{1}{3} = 2,$$

$$x^{-1/3} \div x^{2/3} = x^{-1},$$

$$y^{1/3} \div y^{-2/3} = y^{1}.$$

Entonces:

$$\mathrm{TMS}_{yx} = 2\frac{y}{x}.$$

#### 4.3.2.5. 5. Interpretación intuitiva

Este resultado significa que la disposición a sustituir $y$ por $x$ depende de la razón $y/x$. Si $x$ sube y $y$ baja sobre la misma curva de indiferencia, la TMS disminuye. Eso quiere decir que Valentina va aceptando sacrificar cada vez menos unidades de $y$ por una unidad extra de $x$.

#### 4.3.2.6. 6. Evaluación en puntos concretos

En $(6, 12)$:

$$\mathrm{TMS}_{yx} = 2\frac{12}{6} = 2 \cdot 2 = 4.$$

En esa canasta, Valentina estaría dispuesta a sacrificar 4 unidades de $y$ por una unidad adicional de $x$.

En $(12, 6)$:

$$\mathrm{TMS}_{yx} = 2\frac{6}{12} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Aquí Valentina estaría dispuesta a sacrificar solo 1 unidad de $y$ por una unidad adicional de $x$.

La comparación muestra que la TMS cae cuando aumenta $x$. Eso indica que, cuando Valentina ya tiene más comida, una unidad extra de comida le importa relativamente menos.

#### 4.3.2.7. 7. Convexidad de las curvas de indiferencia

Como la TMS no es constante y disminuye a medida que aumenta $x$, las curvas de indiferencia son **convexas al origen**. La intuición es que Valentina prefiere combinaciones equilibradas de ambos bienes y no concentrar todo el consumo en uno solo.

#### 4.3.2.8. 8. Resumen corto

Para

$$U = x^{2/3}y^{1/3},$$

se obtiene:

$$UM_x = \frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3},$$

$$UM_y = \frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3},$$

$$\text{TMS}_{yx} = \frac{UM_x}{UM_y} = 2\frac{y}{x}.$$

Tabla 10: La TMS cae cuando aumenta el consumo de x

| punto | TMS | lectura |
|---|---|---|
| (6,12) | 4 | Alta disposición a sacrificar y por x |
| (12,6) | 1 | Menor disposición a sacrificar y por x |

## 4.4. 3. Óptimo del consumidor

### 4.4.1. Enunciado

**3. (Óptimo del consumidor.)**
**(a)** Escriba la condición de tangencia entre la curva de indiferencia y la recta presupuestaria. Interprete: ¿qué igualdad entre precios subjetivos y objetivos caracteriza el óptimo?
**(b)** Usando la condición de tangencia y la restricción presupuestaria, encuentre las demandas óptimas $(x^*, y^*)$.
**(c)** Calcule $U^* = U(x^*, y^*)$ e identifique el óptimo en el gráfico. ¿Qué fracción del ingreso gasta Valentina en cada bien?

### 4.4.2. Desarrollo

#### 4.4.2.1. (a) Tangencia

Este apartado se conecta directamente con el ejercicio anterior. En el punto **2(a)** obtuvimos la Tasa Marginal de Sustitución de Valentina:

$$\text{TMS}_{yx} = 2\frac{y}{x}.$$

Esta TMS mide cuántas unidades de entretenimiento ($y$) está dispuesta a sacrificar Valentina para obtener una unidad adicional de comida ($x$), manteniendo constante su utilidad. Por eso podemos interpretarla como un **precio subjetivo**: no es un precio de mercado, sino la valoración personal de Valentina entre ambos bienes.

Por otro lado, la restricción presupuestaria inicial es:

$$4x + 6y = 120.$$

Si despejamos $y$, obtenemos la recta presupuestaria:

$$6y = 120 - 4x,$$

$$y = 20 - \frac{4}{6}x.$$

Entonces la pendiente de la restricción presupuestaria es:

$$-\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

En valor absoluto, esa pendiente es:

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Este número representa el **precio objetivo** o precio relativo de mercado. Dice cuántas unidades de entretenimiento debe sacrificar Valentina si quiere comprar una unidad adicional de comida. Como la comida cuesta 4 y el entretenimiento cuesta 6, una unidad adicional de comida cuesta lo mismo que:

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

unidades de entretenimiento.

En un óptimo interior, la curva de indiferencia más alta posible debe ser tangente a la recta presupuestaria. Eso significa que sus pendientes, en valor absoluto, deben ser iguales:

$$\text{TMS} = \frac{p_x}{p_y}.$$

Usando los valores del problema, la condición queda:

$$2\frac{y}{x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Esta igualdad resume la lógica del óptimo del consumidor. El lado izquierdo, la TMS, representa el **precio subjetivo**: cuánto entretenimiento está dispuesta a sacrificar Valentina por una unidad adicional de comida según sus preferencias. El lado derecho, $p_x/p_y$, representa el **precio objetivo** del mercado: cuánto entretenimiento debe sacrificar realmente si quiere comprar una unidad adicional de comida.

Geométricamente, la TMS es la pendiente en valor absoluto de la curva de indiferencia, mientras que $p_x/p_y$ es la pendiente en valor absoluto de la recta presupuestaria. En el punto óptimo, ambas pendientes coinciden. Eso significa que la canasta elegida es justamente aquella en la que la valoración subjetiva de cambiar un bien por otro coincide con la relación de intercambio que impone el mercado.

La intuición es la siguiente:

- Si TMS $> p_x/p_y$, Valentina está dispuesta a sacrificar más entretenimiento por una unidad adicional de comida de lo que el mercado realmente le exige. En ese caso, la comida vale subjetivamente más que su costo relativo de mercado, por lo que le conviene consumir más $x$.
- Si TMS $< p_x/p_y$, Valentina está dispuesta a sacrificar menos entretenimiento por una unidad adicional de comida de lo que el mercado exige. En ese caso, la comida es subjetivamente "cara" para ella, por lo que le conviene consumir menos $x$ y más $y$.
- Solo cuando TMS $= p_x/p_y$ no hay incentivo para moverse en ninguna dirección sobre la recta presupuestaria. Ese es el punto de tangencia y, por lo tanto, el candidato natural a óptimo.

Interpretación: en el óptimo, la valoración subjetiva de una unidad adicional de $x$ en términos de $y$ coincide con el precio relativo de mercado.

Antes de pasar al cálculo, conviene distinguir claramente qué hace este apartado y qué hará el siguiente. En **(a)** no estamos encontrando todavía los números exactos de la canasta óptima. Lo que hacemos es escribir la **regla que debe cumplir** cualquier óptimo interior:

$$\text{precio subjetivo} = \text{precio objetivo}.$$

En este problema, eso significa:

$$2\frac{y}{x} = \frac{2}{3}.$$

Esta ecuación todavía no nos dice directamente cuántas unidades de comida y entretenimiento comprará Valentina. Solo nos dice la **proporción** que debe existir entre ambos bienes en el óptimo. Para encontrar los valores exactos de $x^*$ e $y^*$ necesitamos, además, usar el presupuesto disponible. Por eso el apartado **(b)** combina dos piezas:

1. la condición de tangencia, que entrega la proporción óptima entre $x$ e $y$;
2. la restricción presupuestaria, que indica cuáles combinaciones puede pagar Valentina.

En resumen: **(a)** entrega la regla del óptimo; **(b)** usa esa regla junto con el presupuesto para obtener la canasta óptima exacta.

#### 4.4.2.2. (b) Demandas óptimas

Ahora sí usamos la condición de tangencia junto con la restricción presupuestaria para encontrar la canasta óptima exacta. La idea es esta: la tangencia nos dice **cómo deben relacionarse** $x$ e $y$ en el óptimo, mientras que la restricción presupuestaria nos dice **qué combinaciones son posibles** dado el ingreso. Solo al combinar ambas ecuaciones podemos identificar $(x^*, y^*)$.

Para que se vea que ambos caminos llegan al mismo resultado, resolvamos las demandas óptimas de dos formas.

##### 4.4.2.2.1. Forma 1: versión extendida, usando TMS y restricción presupuestaria

Esta es la forma más directa y es la que sigue el razonamiento del ejercicio **2. Preferencias y TMS**.

En el ejercicio 2 derivamos la TMS de Valentina:

$$\mathrm{TMS}_{yx} = 2\frac{y}{x}.$$

Luego, en el punto **3(a)** dijimos que en el óptimo interior debe cumplirse:

$$\mathrm{TMS}_{yx} = \frac{p_x}{p_y}.$$

Como los precios son $p_x = 4$ y $p_y = 6$, el precio relativo es:

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Por lo tanto, la condición de tangencia queda:

$$2\frac{y}{x} = \frac{2}{3}.$$

Ahora resolvemos esta ecuación paso a paso. Primero dividimos ambos lados por 2:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{3}.$$

Ahora multiplicamos por $x$:

$$y = \frac{x}{3}.$$

Esta expresión todavía no es la solución final. Lo que nos dice es que, en el óptimo, el consumo de entretenimiento debe ser exactamente un tercio del consumo de comida. Es decir, la tangencia nos entrega una **relación de proporcionalidad**:

$$y = \frac{x}{3}.$$

Hasta aquí solo sabemos la forma que debe tener la canasta óptima. Todavía no sabemos si Valentina comprará, por ejemplo, $(3, 1)$, $(30, 10)$ o alguna otra combinación con esa misma proporción. Para encontrar el nivel exacto de consumo necesitamos usar la restricción presupuestaria.

La segunda ecuación que necesitamos es la restricción presupuestaria:

$$4x + 6y = 120.$$

Ahora sustituimos la relación óptima $y = x/3$ dentro de la restricción. Esto permite elegir, entre todas las canastas que cumplen la proporción óptima, aquella que Valentina efectivamente puede pagar gastando todo su ingreso:

$$4x + 6\left(\frac{x}{3}\right) = 120.$$

Simplificando:

$$4x + 2x = 120.$$

Por tanto:

$$6x = 120.$$

Despejando:

$$x^* = 20.$$

Una vez encontrado $x^*$, lo reemplazamos en la relación $y = x/3$:

$$y^* = \frac{20}{3} \approx 6,67.$$

Por lo tanto, la canasta óptima es:

$$(x^*, y^*) = \left(20, \frac{20}{3}\right).$$

Si queremos comprobar que efectivamente esta canasta agota el ingreso, reemplazamos en la restricción presupuestaria:

$$4(20) + 6\left(\frac{20}{3}\right) = 80 + 40 = 120.$$

Eso confirma que el punto encontrado es factible y usa todo el ingreso disponible.

Por esta primera forma, entonces, las demandas óptimas son:

$$x^* = 20, \qquad y^* = \frac{20}{3}.$$

#### 4.4.2.2.2. Forma 2: versión resumida, usando la fórmula Cobb-Douglas

Ahora hagamos lo mismo con la fórmula general de Cobb-Douglas. Esta forma es más corta, pero conceptualmente resume el mismo procedimiento anterior.

La función de utilidad de Valentina es:

$$U(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}.$$

Esta función tiene la forma general:

$$U(x, y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha}.$$

En este caso:

$$\alpha = \frac{2}{3}, \qquad 1 - \alpha = \frac{1}{3}.$$

La regla resumida de Cobb-Douglas dice que el consumidor gasta:

- la fracción $\alpha$ del ingreso en el bien $x$;
- la fracción $1 - \alpha$ del ingreso en el bien $y$.

Por lo tanto, Valentina gasta:

- $2/3$ de su ingreso en comida;
- $1/3$ de su ingreso en entretenimiento.

Como el ingreso es $m = 120$, el gasto óptimo en cada bien es:

$$\text{Gasto en } x = \frac{2}{3} \cdot 120 = 80,$$

$$\text{Gasto en } y = \frac{1}{3} \cdot 120 = 40.$$

Pero la demanda no se expresa en pesos gastados, sino en cantidades. Por eso dividimos cada gasto por el precio correspondiente.

Para comida:

$$x^* = \frac{\text{gasto en } x}{p_x} = \frac{80}{4} = 20.$$

Para entretenimiento:

$$y^* = \frac{\text{gasto en } y}{p_y} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}.$$

Esos dos pasos se pueden escribir directamente con la fórmula:

$$x^* = \frac{\alpha m}{p_x}, \qquad y^* = \frac{(1-\alpha)m}{p_y}.$$

Aplicando los valores del problema:

$$x^* = \frac{(2/3)\cdot 120}{4} = 20,$$

$$y^* = \frac{(1/3)\cdot 120}{6} = \frac{20}{3}.$$

#### 4.4.2.2.3. Comparación entre ambas formas

Las dos formas llegan al mismo resultado:

$$(x^*, y^*) = \left(20, \frac{20}{3}\right).$$

La diferencia está en el nivel de detalle:

- La **forma extendida** muestra todo el razonamiento: primero calcula la relación óptima con la TMS y luego usa el presupuesto.
- La **forma resumida** usa una propiedad conocida de Cobb-Douglas: los exponentes indican qué fracción del ingreso se gasta en cada bien.

Por eso no son dos soluciones distintas. La segunda es un atajo de la primera.

La interpretación económica es muy útil: Valentina elige la canasta en la que su disposición subjetiva a sustituir entretenimiento por comida coincide con los precios del mercado, y además esa canasta cabe exactamente dentro de su presupuesto. Por eso estas son sus demandas óptimas.

#### 4.4.2.3. (c) Utilidad y gasto

$$U^* = (20)^{2/3} \left(\frac{20}{3}\right)^{1/3} \approx 13,87.$$

Valentina gasta:

- **2/3 del ingreso** en comida;
- **1/3 del ingreso** en entretenimiento.

Tabla 11: Óptimo del consumidor

| magnitud | valor |
|---|---|
| x* | 20,00 |
| y* | 6,67 |
| U* | 13,87 |
| Gasto en x | 2/3 del ingreso |
| Gasto en y | 1/3 del ingreso |

## 4.5. Apéndice: La función de utilidad Cobb-Douglas

La función de utilidad Cobb-Douglas es una de las más importantes en teoría del consumidor. Su popularidad se debe a que, a pesar de su aparente simplicidad, genera resultados económicamente significativos y es matemáticamente muy manejable. Este apéndice explica qué es, cuándo se utiliza, cómo se resuelve, y por qué la fórmula simplificada funciona.

### 4.5.1. ¿Qué es una función Cobb-Douglas?

Una función de utilidad Cobb-Douglas tiene la forma:

$$U(x, y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha},$$

donde $\alpha \in (0, 1)$ es un parámetro que mide la importancia relativa del bien $x$ en las preferencias del consumidor. El parámetro $(1 - \alpha)$ mide la importancia del bien $y$.

**Características algebraicas:**

- Es una función de potencia en dos variables.
- Los exponentes suman uno: $\alpha + (1 - \alpha) = 1$.
- Es homogénea de grado 1, lo que significa que si multiplicas ambos bienes por una constante $k$, la utilidad se multiplica por $k$: $U(kx, ky) = (kx)^{\alpha}(ky)^{1-\alpha} = k \cdot x^{\alpha} y^{1-\alpha} = k \cdot U(x, y)$.

**Características económicas:**

- Más es mejor: consumir más de cualquiera de los dos bienes aumenta la utilidad.
- Las preferencias son convexas: el consumidor prefiere cestas relativamente equilibradas a cestas especializadas.
- Existe sustitución entre bienes: el consumidor está dispuesto a intercambiar uno por otro, pero a una tasa que depende de las cantidades que posee.

### 4.5.2. ¿Cuándo se utiliza?

La mejor forma de entender cuándo se utiliza Cobb-Douglas es mirar los ejercicios de esta misma guía:

**Ejercicio 3 (Valentina y su consumo):** Valentina elige entre comida ($x$) y entretenimiento ($y$). Sus preferencias se modelan como $U(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}$. Esto es una Cobb-Douglas porque: - Valentina valora **ambos bienes**, no solo uno. No es vegetariana absoluta ni asceta. - Estamos agregando dos categorías de consumo amplias: comida y entretenimiento. - Queremos poder calcular cantidades óptimas exactas sin hacer simulaciones.

En este caso, Cobb-Douglas es apropiada porque captura que Valentina está dispuesta a intercambiar comida por entretenimiento en proporciones que dependen de cuánto consume de cada uno.

**Ejercicio 4 (Estática comparativa):** Después estudiamos qué pasa cuando cambia el ingreso o los precios de Valentina. Cobb-Douglas es perfecta aquí porque: - Podemos derivar respuestas analíticas cerradas: $x^* = \frac{\alpha m}{p_x}$, $y^* = \frac{(1-\alpha)m}{p_y}$. - Vemos directamente que si el ingreso sube, ambas cantidades suben en la misma proporción (ambos bienes son normales). - Vemos que si sube un precio, se puede demostrar cuáles son exactamente los efectos sustitución e ingreso.

Cobb-Douglas permite responder estas preguntas sin necesidad de simulación numérica.

**Ejercicio 5 (Comercio exterior):** Cuando comparamos autarquía con comercio, trabajamos con funciones de utilidad y de producción. Cobb-Douglas aparece nuevamente porque permite expresar preferencias de forma matemáticamente tratable mientras se resuelven problemas de equilibrio general.

**En general, Cobb-Douglas se utiliza cuando:**

1. **Los bienes son complementarios en grado moderado.** No son sustitutos perfectos (como dos marcas idénticas) ni complementarios perfectos (como zapato izquierdo y derecho). Valentina quiere ambos.

2. **Se necesitan respuestas analíticas cerradas.** Si necesitases resolver numéricamente o por aproximación, otras formas podrían ser más realistas. Pero Cobb-Douglas es resoluble algebraicamente.

3. **Los parámetros tienen interpretación económica clara.** Los exponentes $\alpha$ y $1 - \alpha$ te dicen directamente qué fracción del ingreso se gasta en cada bien. Eso es interpretable.
4. **Hay dos o más bienes que se pueden agrupar en categorías amplias.** No es apropiada si quieres modelar sustitución dentro de cada categoría (por ejemplo, diferentes marcas de comida).

**En la práctica académica:** Cobb-Douglas es estándar en teoría del consumidor, crecimiento económico, y modelos macroeconómicos porque balancea realismo con tracabilidad.

### 4.5.3. ¿Cómo se resuelve?

Hay dos formas principales de resolver el problema de optimación del consumidor bajo Cobb-Douglas: la forma **detallada** (que enseña la lógica) y la forma **resumida** (que es más rápida). Ambas llegan al mismo resultado.

#### 4.5.3.1. Forma 1: Resolución detallada paso a paso

Esta es la forma que utilizamos en la sección anterior. El procedimiento es:

**Paso 1: Calcula las utilidades marginales.**

$$UM_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha},$$

$$UM_y = \frac{\partial U}{\partial y} = (1-\alpha) x^{\alpha} y^{-\alpha}.$$

**Paso 2: Forma la Tasa Marginal de Sustitución.**

La Tasa Marginal de Sustitución (TMS) es un concepto general que se define para **cualquier función de utilidad**. Se calcula dividiendo las utilidades marginales:

$$\text{TMS}_{y,x} = \frac{UM_x}{UM_y}.$$

Lo que es **específico de Cobb-Douglas** es que, cuando aplicas esta definición general a la forma funcional $U(x, y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha}$, obtienes una expresión particularmente simple y elegante:

$$\text{TMS}_{y,x} = \frac{UM_x}{UM_y} = \frac{\alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha}}{(1-\alpha) x^{\alpha} y^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{y}{x}.$$

Nota que la TMS **siempre tiene esta estructura para Cobb-Douglas:** un coeficiente constante $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ multiplicado por la razón de cantidades $\frac{y}{x}$. Esto es una propiedad algebraica de esta función específica, no una definición nueva.

**Paso 3: Iguala la TMS al cociente de precios relativos.**

En el óptimo, la disposición a sustituir debe coincidir con la relación de precios:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y}.$$

Despeja la relación entre cantidades:

$$\frac{y}{x} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{p_x}{p_y}.$$

**Paso 4: Combina con la restricción presupuestaria.**

La restricción es $p_x x + p_y y = m$. Sustituyendo $y = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{p_x}{p_y} \cdot x$:

$$p_x x + p_y \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{p_x}{p_y} \cdot x = m.$$

Simplifica:

$$p_x x + \frac{1-\alpha}{\alpha} p_x x = m,$$

$$p_x x \left(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right) = m,$$

$$p_x x \cdot \frac{\alpha + 1 - \alpha}{\alpha} = m,$$

$$p_x x \cdot \frac{1}{\alpha} = m.$$

Por lo tanto:

$$x^* = \frac{\alpha m}{p_x}.$$

Similarmente, sustituyendo en la relación de $y$:

$$y^* = \frac{(1-\alpha)m}{p_y}.$$

**Este es el resultado final de la forma detallada.**

#### 4.5.3.2. Forma 2: Atajos conceptuales

Si entiendes la lógica anterior, puedes saltarte los pasos algebraicos y usar directamente el resultado, porque la estructura es **siempre la misma** para cualquier Cobb-Douglas.

**La regla de oro de Cobb-Douglas:** para una función $U(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$, el consumidor optará por gastar:

- la fracción $\alpha$ de su ingreso en el bien $x$,
- la fracción $(1 - \alpha)$ de su ingreso en el bien $y$.

Las cantidades consumidas son simplemente:

$$x^* = \frac{\alpha m}{p_x}, \quad y^* = \frac{(1-\alpha)m}{p_y}.$$

### 4.5.4. ¿Por qué funciona? La conexión entre métodos

La pregunta natural es: **¿por qué la forma resumida nos da directamente el resultado correcto?**

La respuesta es que **la forma resumida encapsula los pasos algebraicos de la forma detallada.** No es un truco; es el resultado inevitable de seguir la lógica de optimación hasta el final.

#### 4.5.4.1. Paso 1: La TMS revela la estructura

Cuando calculas $\text{TMS}_{y,x} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{y}{x}$ para una Cobb-Douglas, obtiene una estructura muy especial: los precios no aparecen. Esto contrasta con otras funciones de utilidad, donde la TMS generalmente depende de los precios de formas más complicadas.

#### 4.5.4.2. Paso 2: La canasta óptima tiene gasto constante

Cuando igualas TMS $= \frac{p_x}{p_y}$ y resuelves el sistema, los precios relativos se **cancelan** en un punto crucial. Lo que queda es que la razón de gastos en cada bien es:

$$\frac{\text{Gasto en } y}{\text{Gasto en } x} = \frac{p_y y^*}{p_x x^*} = \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

**Esto es lo crucial:** esta razón **no depende de los precios individuales.** Depende solo de $\alpha$ y $(1-\alpha)$, es decir, solo de las preferencias.

Si el ingreso total es $m = p_x x^* + p_y y^*$, y sabes que $\frac{p_y y^*}{p_x x^*} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$, puedes resolver directamente:

$$p_x x^* = \alpha m, \quad p_y y^* = (1-\alpha)m.$$

Dividiendo entre los precios:

$$x^* = \frac{\alpha m}{p_x}, \quad y^* = \frac{(1-\alpha)m}{p_y}.$$

#### 4.5.4.3. Paso 3: Interpretación económica

Este resultado tiene una interpretación profunda: **para un consumidor con preferencias Cobb-Douglas, el óptimo es completamente determinado por tres cosas:**

1. Los parámetros de preferencia ($\alpha$ y $1-\alpha$).
2. El ingreso disponible ($m$).
3. Los precios ($p_x$ y $p_y$).

No hay incertidumbre ni ambigüedad. La estructura de gastos está "programada" en las preferencias.

### 4.5.5. Ejemplo numérico

Volviendo a Valentina con $U(x,y) = x^{2/3}y^{1/3}$, $p_x = 4$, $p_y = 6$, $m = 120$:

**Con la forma detallada:** calculamos utilidades marginales, formamos TMS, igualamos a precios, resolvemos el sistema. Resultado: $x^* = 20$, $y^* = \frac{20}{3}$.

**Con la forma resumida:** como $\alpha = \frac{2}{3}$, aplicamos la regla directamente:

$$x^* = \frac{(2/3)\cdot 120}{4} = \frac{80}{4} = 20,$$

$$y^* = \frac{(1/3) \cdot 120}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}.$$

**Mismo resultado, mucho más rápido.**

#### 4.5.6. Ventajas y limitaciones

**Ventajas:**

- Forma cerrada: siempre obtienes respuestas analíticas explícitas.
- Escala bien: funciona igual para 2 o más bienes.
- Interpretación clara: los parámetros tienen significado económico directo (participación del ingreso).
- Realismo moderado: más general que utilidad lineal, más manejable que funciones arbitrarias.

**Limitaciones:**

- Asume que ambos bienes se consumen en cantidades positivas. Si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$, obtienes soluciones de esquina.
- Asume preferencias específicas (convexas, simétricas en estructura logarítmica).
- No captura complementariedad perfecta ni sustitución perfecta entre bienes.

#### 4.5.7. Resumen

La función Cobb-Douglas es un caballo de batalla en economía porque ofrece un equilibrio entre realismo y manejabilidad. Entender **tanto** la forma detallada como la forma resumida es importante: la primera te enseña qué está sucediendo económicamente, la segunda te permite resolver problemas rápidamente sin perder comprensión. Ambas son facetas del mismo proceso de optimación.

### 4.6. 4. Estática comparativa

#### 4.6.1. Enunciado

> **4. (Estática comparativa.)**
> **(a) Efecto ingreso:** suponga que el ingreso sube de 120 a 180 (manteniendo los precios originales). Calcule los nuevos $(x^{**}, y^{**})$. ¿Ambos bienes son normales para Valentina?
> **(b) Efecto precio:** vuelva al ingreso original ($m = 120$) pero suba $p_x$ a 6. Calcule el nuevo óptimo. ¿Cómo cambia el consumo de $x$? ¿Y el de $y$? Explique la intuición.

**(c)** Grafique en un mismo diagrama los tres óptimos (original, ingreso mayor, precio mayor) sobre sus respectivas rectas presupuestarias. ¿En qué dirección se desplaza el óptimo en cada caso?

### 4.6.2. Desarrollo

La estática comparativa estudia cómo cambia la elección óptima cuando cambia alguna condición del problema, como el ingreso o los precios. La idea no es volver a resolver todo desde cero por gusto, sino entender cómo responden las decisiones del consumidor ante cambios en su entorno económico.

#### 4.6.2.1. (a) Aumento del ingreso

Con $m = 180$ y manteniendo los precios iniciales, no cambian las preferencias ni los precios relativos. Lo único que cambia es que Valentina tiene más ingreso disponible.

Este punto se conecta directamente con el ejercicio anterior. En el apartado **3(b)** ya encontramos el óptimo inicial usando dos elementos:

1. la condición de tangencia, que nos entregó la relación óptima $y = x/3$;
2. la restricción presupuestaria inicial, $4x + 6y = 120$.

De ahí obtuvimos:

$$(x^*, y^*) = \left(20, \frac{20}{3}\right).$$

En el apartado **3(c)** además vimos que esa canasta tiene una interpretación muy importante: Valentina gasta siempre **2/3 del ingreso en comida** y **1/3 del ingreso en entretenimiento**. Por lo tanto, cuando ahora sube el ingreso de 120 a 180, no estamos inventando una fórmula nueva; estamos usando la misma regla del óptimo Cobb-Douglas, pero con un ingreso mayor.

Recordemos por qué aparece esa regla. La utilidad es

$$U(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}.$$

En una Cobb-Douglas de la forma

$$U(x, y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha},$$

el consumidor gasta una fracción fija del ingreso en cada bien:

- la fracción $\alpha$ del ingreso se gasta en $x$;

- la fracción $1 - \alpha$ del ingreso se gasta en $y$.

En este caso, $\alpha = 2/3$. Por eso Valentina gasta:

- $2/3$ de su ingreso en comida ($x$);
- $1/3$ de su ingreso en entretenimiento ($y$).

Como ahora el ingreso es $m = 180$, el gasto óptimo en cada bien es:

$$\text{Gasto en } x = \frac{2}{3} \cdot 180 = 120,$$

$$\text{Gasto en } y = \frac{1}{3} \cdot 180 = 60.$$

Para pasar de gasto a cantidad, dividimos por el precio de cada bien. Como los precios iniciales se mantienen, $p_x = 4$ y $p_y = 6$. Entonces:

$$x^{**} = \frac{(2/3) \cdot 180}{4} = 30,$$

$$y^{**} = \frac{(1/3) \cdot 180}{6} = 10.$$

La misma conclusión se puede obtener resolviendo nuevamente con tangencia y restricción presupuestaria. Como los precios no cambiaron, la condición de tangencia sigue entregando la misma relación óptima que antes:

$$y = \frac{x}{3}.$$

La diferencia es que ahora la restricción presupuestaria es:

$$4x + 6y = 180.$$

Sustituyendo $y = x/3$:

$$4x + 6\left(\frac{x}{3}\right) = 180.$$

Simplificando:

$$4x + 2x = 180,$$

$$6x = 180,$$

$$x^{**} = 30.$$

Luego:

$$y^{**} = \frac{x^{**}}{3} = \frac{30}{3} = 10.$$

La nueva canasta óptima es, por tanto,

$$(x^{**}, y^{**}) = (30, 10).$$

Como ambos bienes aumentan cuando sube el ingreso, concluimos que **ambos son normales** para Valentina. La intuición es simple: al tener más ingreso y mantenerse los precios, puede comprar más de ambos bienes y, dado que sus preferencias son monótonas, el óptimo se desplaza hacia una canasta más alta.

#### 4.6.2.2. (b) Aumento del precio de $x$

Ahora volvemos a $m = 120$, pero subimos el precio de la comida a $p_x = 6$. Las demandas óptimas pasan a ser:

$$x' = \frac{(2/3) \cdot 120}{6} = \frac{80}{6} \approx 13,33,$$

$$y' = \frac{(1/3) \cdot 120}{6} = \frac{40}{6} \approx 6,67.$$

Entonces la nueva canasta óptima es:

$$(x', y') = (13,33, 6,67).$$

Aquí ocurren dos cosas. Primero, el consumo de $x$ cae, porque ese bien se volvió más caro. Segundo, el consumo de $y$ **se mantiene igual** a 20/3. Esto a veces sorprende, pero en Cobb-Douglas tiene una explicación muy limpia: Valentina siempre gasta un tercio del ingreso en $y$. Como el ingreso no cambió y el precio de $y$ tampoco, el gasto en $y$ sigue siendo el mismo, y por eso la cantidad consumida de $y$ no se modifica.

Si uno quisiera describirlo con lenguaje más teórico, en una suba del precio de $x$ aparecen un **efecto sustitución** y un **efecto ingreso**. El efecto sustitución empuja a consumir menos $x$ porque ahora es relativamente más caro. El efecto ingreso reduce el poder de compra total. En esta función Cobb-Douglas específica, el resultado final es que la cantidad de $x$ cae, mientras que la de $y$ queda constante.

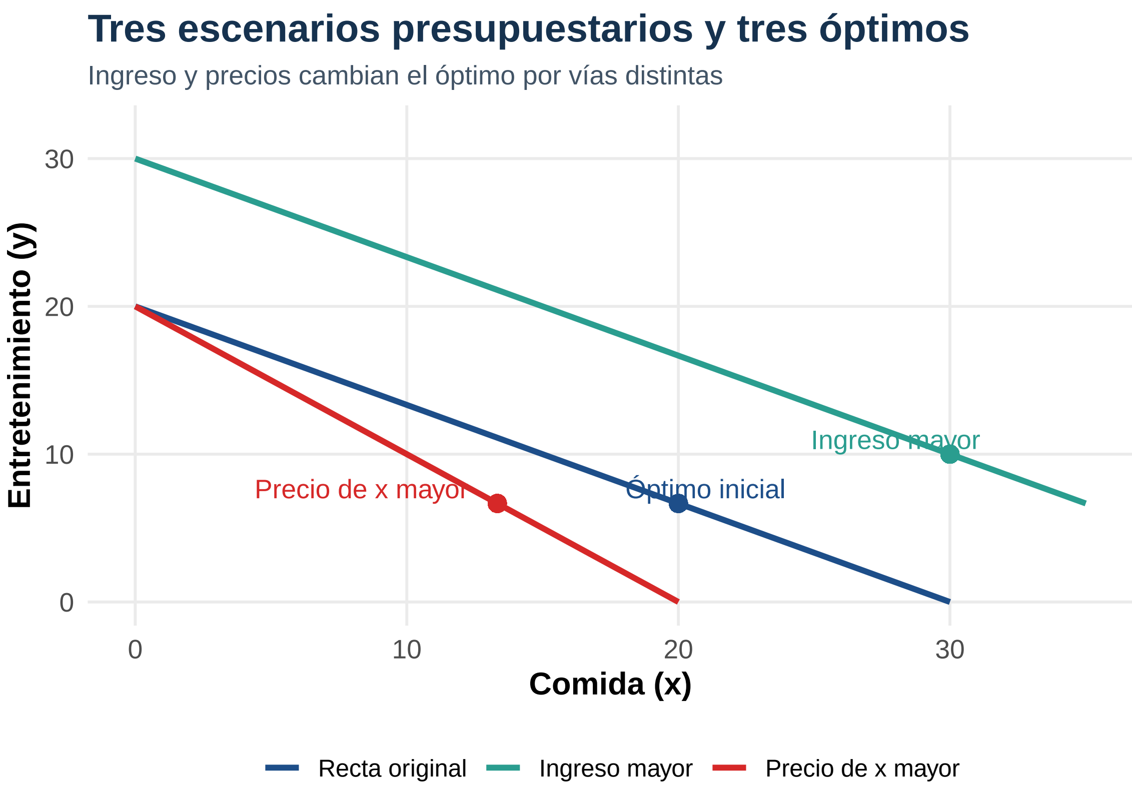
#### 4.6.2.3. (c) Lectura del gráfico

- Con más ingreso, la restricción presupuestaria se desplaza paralelamente hacia afuera y el óptimo se mueve hacia arriba y a la derecha: más de ambos bienes.
- Con precio de $x$ mayor, la recta gira hacia adentro y el óptimo se mueve hacia menos comida.

La comparación entre estos tres escenarios permite ver con claridad que el consumidor no responde igual a todos los cambios. Cuando cambia el ingreso, cambia el tamaño del conjunto factible; cuando cambia un precio, cambia además la pendiente de la restricción, es decir, cambia la tasa objetiva a la que el mercado permite intercambiar un bien por el otro.

Tabla 12: Cambios en el óptimo ante variaciones de ingreso y precio

| escenario | x_opt | y_opt | utilidad |
|---|---|---|---|
| Inicial | 20,00 | 6,67 | 13,87 |
| Ingreso = 180 | 30,00 | 10,00 | 20,80 |
| Precio de x = 6 | 13,33 | 6,67 | 10,58 |




## 4.7. 5. Interpretación geométrica global

### 4.7.1. Enunciado

**5. (Interpretación geométrica global.)**
**(a)** Señale en el gráfico un punto factible pero subóptimo, un punto óptimo y un punto deseado pero no factible. ¿Qué rol juega cada uno en el análisis del consumidor?
**(b)** Explique con palabras por qué el óptimo **no puede** estar en el interior de la restricción presupuestaria cuando las preferencias satisfacen no saciedad.

### 4.7.2. Desarrollo

- Un punto **factible pero subóptimo** está por debajo de la mejor curva de indiferencia alcanzable. Muestra que no todo punto factible maximiza utilidad.
- Un punto **óptimo** es el de tangencia entre curva de indiferencia y restricción presupuestaria.

- Un punto **deseado pero no factible** está por encima de la restricción: sería preferido, pero el ingreso no alcanza.

Con no saciedad, el óptimo no puede estar en el interior porque si todavía queda presupuesto sin usar, la persona puede aumentar un poco el consumo de al menos un bien y mejorar su bienestar. Por eso el óptimo, cuando existe interiormente, queda sobre la frontera presupuestaria.

# 5. Parte IV. Matemático III: Comercio internacional y consumo más allá de la FPP

## 5.1. Contexto y preparación

### 5.1.1. Enunciado general

**Contexto.** El país Araucanía puede producir dos bienes: trigo ($T$, en toneladas) y acero ($S$, en toneladas). Su FPP viene dada por:

$$T + 2S = 200,$$

lo que refleja que los recursos son perfectamente adaptables entre sectores (FPP lineal). En autarquía, el precio relativo interno es $p^{aut} = p_S/p_T = 2$, lo que coincide con el costo de oportunidad de la FPP. Al abrirse al comercio mundial, el país enfrenta un precio relativo $p^{world} = p_S/p_T = 3$. Las preferencias sociales se representan mediante:

$$U(T, S) = T^{1/2}S^{1/2}.$$

## 5.2. 1. Autarquía: FPP y óptimo sin comercio

### 5.2.1. Enunciado

**1. (Autarquía: FPP y óptimo sin comercio.)**
**(a)** Grafique la FPP de Araucanía en el plano $(S, T)$, con $S$ en el eje horizontal. Señale los interceptos y la pendiente.
**(b)** En autarquía el país debe consumir lo que produce: el conjunto factible de consumo coincide con la FPP. Encuentre el óptimo de autarquía $(S^{aut}, T^{aut})$ igualando la TMS al costo de oportunidad interno.
**(c)** Calcule $U^{aut}$. Represente el óptimo en el gráfico.

### 5.2.2. Desarrollo

La FPP es

$$T = 200 - 2S.$$

#### 5.2.2.1. (a) Interceptos y pendiente

- Si $S = 0$, entonces $T = 200$.
- Si $T = 0$, entonces $S = 100$.
- La pendiente es $-2$.

#### 5.2.2.2. (b) Óptimo de autarquía

Con utilidad $U = T^{1/2}S^{1/2}$, la TMS en valor absoluto es

$$\text{TMS} = \frac{T}{S}.$$

En autarquía, la TMS debe igualar el costo de oportunidad interno:

$$\frac{T}{S} = 2.$$

Entonces

$$T = 2S.$$

Sustituyendo en la FPP:

$$2S + 2S = 200 \quad \Longrightarrow \quad 4S = 200 \quad \Longrightarrow \quad S^{aut} = 50.$$

Luego,

$$T^{aut} = 100.$$

#### 5.2.2.3. (c) Utilidad de autarquía

$$U^{aut} = \sqrt{50 \cdot 100} \approx 70,71.$$

## 5.3. 2. Ventaja comparativa e incentivo a especializarse

### 5.3.1. Enunciado

**2. (Ventaja comparativa e incentivo a especializarse.)**
**(a)** Compare el precio relativo mundial $p^{world} = 3$ con el costo de oportunidad interno de producir acero (=2). ¿En qué bien tiene ventaja comparativa Araucanía?
**(b)** Con comercio, Araucanía elige el punto de producción que maximiza el valor de su producción a los precios mundiales. Escriba el ingreso nacional valuado a precios mundiales

$$I(S_p) = 3S_p + T_p, \text{ sujeto a } T_p + 2S_p = 200.$$

Sustituyendo la FPP, muestre que $I(S_p)$ es creciente en $S_p$. ¿Cuál es el punto de producción óptimo $(S_p^*, T_p^*)$?
**(c)** Interprete geométricamente: el país se especializa completamente en el bien de su ventaja comparativa. ¿Qué ocurre con la producción del otro bien?

### 5.3.2. Desarrollo

#### 5.3.2.1. (a) Ventaja comparativa

El costo de oportunidad interno de una tonelada de acero es 2 toneladas de trigo. El precio mundial recompensa una tonelada de acero con 3 toneladas de trigo. Como el acero vale **más afuera** que adentro, Araucanía tiene ventaja comparativa en **acero**.

#### 5.3.2.2. (b) Producción óptima con comercio

El ingreso nacional valuado a precios mundiales es

$$I(S_p) = 3S_p + T_p.$$

Como $T_p = 200 - 2S_p$,

$$I(S_p) = 3S_p + 200 - 2S_p = 200 + S_p.$$

Esta expresión es creciente en $S_p$, por lo que conviene llevar $S_p$ al máximo posible:

$$(S_p^*, T_p^*) = (100, 0).$$

#### 5.3.2.3. (c) Interpretación geométrica

El país se especializa completamente en el bien de su ventaja comparativa: produce solo acero y deja de producir trigo.

## 5.4. 3. La recta de comercio como nuevo conjunto factible

### 5.4.1. Enunciado

> **3. (La recta de comercio como nuevo conjunto factible.)**
> **(a)** Con el punto de producción $(S_p^*, T_p^*)$ y el precio relativo mundial, el país puede intercambiar trigo por acero (o viceversa) a razón de 3:1. Escriba la ecuación de la recta de comercio que pasa por $(S_p^*, T_p^*)$ con pendiente $-3$:
>
> $$T = T_p^* + 3(S_p^* - S).$$
>
> Grafique esta recta en el mismo plano que la FPP. ¿La recta de comercio queda por encima o por debajo de la FPP? ¿Por qué?
> **(b)** El nuevo conjunto factible de consumo es la recta de comercio (más el interior debajo de ella). Explique en palabras por qué este conjunto es **más grande** que el conjunto factible en autarquía.
> **(c)** ¿Puede Araucanía ahora consumir combinaciones $(S, T)$ que están fuera de su FPP? Dé un ejemplo numérico de una cesta de consumo factible con comercio pero infactible sin él.

### 5.4.2. Desarrollo

#### 5.4.2.1. (a) Ecuación de la recta de comercio

Ya sabemos que con comercio el país elige producir en

$$(S_p^*, T_p^*) = (100, 0).$$

Eso significa que Araucanía produce solo acero y nada de trigo. A partir de ese punto, puede intercambiar en el mercado mundial a una tasa de **3 toneladas de trigo por 1 tonelada de acero**. Esa tasa de intercambio es justamente la pendiente de la recta de comercio.

Partimos de la expresión general:

$$T = T_p^* + 3(S_p^* - S).$$

Sustituyendo $T_p^* = 0$ y $S_p^* = 100$:

$$T = 0 + 3(100 - S).$$

Desarrollando:

$$T = 300 - 3S.$$

Esta es la recta de comercio. Su pendiente es $-3$, lo que significa que para obtener 1 unidad adicional de acero en consumo, el país debe renunciar a 3 unidades de trigo, y viceversa.

La comparación clave es con la FPP de autarquía:

$$T = 200 - 2S.$$

La recta de comercio queda por encima de la FPP en el tramo relevante porque el precio mundial del acero es más favorable que el costo de oportunidad interno. En otras palabras, por cada unidad de acero que el país entrega afuera, el mundo le devuelve más trigo de lo que Araucanía podría obtener transformando recursos internamente.

#### 5.4.2.2. (b) Conjunto de consumo más grande

En autarquía, el país debe consumir exactamente lo que produce. Por eso el conjunto factible de consumo coincide con los puntos sobre o bajo la FPP.

Con comercio, esa obligación desaparece. Araucanía puede producir en el punto que más le conviene según los precios mundiales y luego intercambiar parte de esa producción por la combinación de bienes que prefiera consumir. Eso separa el problema en dos decisiones distintas:

1. **decisión de producción**: elegir el punto que maximiza el valor de la producción;
2. **decisión de consumo**: elegir el punto preferido sobre la recta de comercio.

Por eso el nuevo conjunto factible de consumo es más grande. El país no cambió su tecnología ni sus recursos, pero sí cambió la **tasa a la que puede transformar un bien en otro mediante intercambio**. Geométricamente, eso se ve en que la recta de comercio pasa por el punto de producción y queda por encima de la FPP, permitiendo acceder a canastas que antes eran inalcanzables.

#### 5.4.2.3. (c) Ejemplo numérico

La canasta $(50, 150)$ es factible con comercio porque satisface la recta de comercio:

$$150 = 300 - 3(50).$$

Veámoslo paso a paso. Si el país produce $(100, 0)$, tiene 100 unidades de acero. Para terminar consumiendo 50 unidades de acero, debe exportar 50. Como el precio mundial es 3 a 1, esas 50 unidades exportadas le permiten importar:

$$3 \cdot 50 = 150$$

unidades de trigo. Por eso el consumo final puede ser $(50, 150)$.

Esa canasta, sin embargo, es infactible en autarquía. Si quisiéramos consumir $S = 50$ sobre la FPP, solo podríamos llegar a:

$$T = 200 - 2(50) = 100.$$

Es decir, sin comercio la economía solo podría alcanzar $(50, 100)$, no $(50, 150)$. Ese contraste muestra con claridad la ganancia del comercio: el país no produce más físicamente que antes, pero sí puede consumir más valor porque intercambia a precios favorables.

## 5.5. 4. Óptimo de consumo con comercio

### 5.5.1. Enunciado

> **4. (Óptimo de consumo con comercio.)**
> **(a)** Encuentre el óptimo de consumo $(S_c^*, T_c^*)$ maximizando $U(T, S) = T^{1/2}S^{1/2}$ sujeto a la recta de comercio del literal anterior.
> **(b)** Calcule $U^{com} = U(T_c^*, S_c^*)$ y compárelo con $U^{aut}$. ¿Es $U^{com} > U^{aut}$? ¿Qué nos dice esto sobre las ganancias del comercio?
> **(c)** Muestre en el gráfico los tres puntos clave: óptimo de producción con comercio, óptimo de consumo con comercio y óptimo de autarquía. Identifique la curva de indiferencia que pasa por el óptimo de consumo con comercio y verifique que es más alta que la de autarquía.

### 5.5.2. Desarrollo

### 5.5.3. 5.5.2.1 Contexto

Antes de resolver el literal (a), conviene separar con mucho cuidado dos decisiones que en autarquía estaban unidas, pero que con comercio pasan a ser distintas:

1. **Decisión de producción:** Araucanía decide qué punto de su FPP producir. Esta decisión se guía por los **precios mundiales**, porque el país quiere maximizar el valor de lo que produce. En el punto anterior ya se obtuvo que, dado que el acero vale relativamente más en el mercado mundial que dentro de la economía, conviene especializar la producción en acero:

$$(S_p^*, T_p^*) = (100, 0).$$

2. **Decisión de consumo:** una vez producido ese valor, Araucanía decide qué combinación de acero y trigo quiere consumir. Esta decisión se guía por las **preferencias sociales**, representadas por:

$$U(T, S) = T^{1/2} S^{1/2}.$$

La idea fundamental es esta: **con comercio, el país ya no está obligado a consumir exactamente lo que produce**. Puede producir acero, vender parte de ese acero en el mercado mundial y usar el valor obtenido para importar trigo. Por eso producción y consumo se separan.

En autarquía, si Araucanía producía una canasta $(S, T)$, necesariamente consumía esa misma canasta. Con comercio, en cambio, puede producir:

$$(S_p^*, T_p^*) = (100, 0),$$

pero consumir otra canasta distinta:

$$(S_c, T_c),$$

siempre que esa canasta sea financiable con el ingreso generado por la producción.

El ingreso nacional valuado a precios mundiales es:

$$I = 3S_p^* + T_p^*.$$

Sustituyendo el punto de producción óptimo:

$$I = 3(100) + 0.$$

Por tanto:

$$I = 300.$$

Este ingreso no debe entenderse como "300 unidades físicas de un bien", sino como el **valor de la producción nacional medido en unidades de trigo**. El acero tiene precio mundial relativo igual a 3, es decir:

$$\frac{p_S}{p_T} = 3.$$

Si tomamos el trigo como numerario, entonces:

$$p_T = 1, \qquad p_S = 3.$$

Así, una tonelada de acero vale lo mismo que tres toneladas de trigo en el mercado mundial.

Por eso la restricción de consumo con comercio es:

$$3S + T = 300.$$

Esta recta dice lo siguiente: el valor total del acero consumido más el valor total del trigo consumido no puede superar el ingreso nacional generado por la producción. Como el acero cuesta 3 y el trigo cuesta 1, consumir $S$ unidades de acero cuesta $3S$, y consumir $T$ unidades de trigo cuesta $T$.

Despejando $T$:

$$T = 300 - 3S.$$

Esta es la **recta de comercio** o **restricción de consumo con comercio**. Su pendiente es $-3$, lo que significa que, a precios mundiales, una unidad adicional de acero en consumo cuesta 3 unidades de trigo. Equivalentemente, si Araucanía quiere consumir más trigo, puede obtenerlo exportando acero.

El problema del literal (a) es entonces:

$$\max_{S,T}\ U(T,S) = T^{1/2}S^{1/2}$$

sujeto a:

$$3S + T = 300.$$

A continuación resolvemos el mismo problema por dos caminos: primero usando tangencia y luego usando el atajo Cobb-Douglas.

### 5.5.4. Método 1

El primer método usa la condición geométrica de óptimo interior: la curva de indiferencia debe ser tangente a la recta de comercio.

En un óptimo interior, la valoración subjetiva de la sociedad entre acero y trigo debe coincidir con el precio relativo mundial. Es decir:

$$\text{TMS}_{S,T} = \frac{p_S}{p_T}.$$

Como:

$$\frac{p_S}{p_T} = 3,$$

la condición de tangencia será:

$$\text{TMS}_{S,T} = 3.$$

Ahora debemos calcular la TMS para la utilidad:

$$U(T,S) = T^{1/2}S^{1/2}.$$

La utilidad marginal del acero es:

$$UM_S = \frac{\partial U}{\partial S} = \frac{1}{2}T^{1/2}S^{-1/2}.$$

La utilidad marginal del trigo es:

$$UM_T = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{1}{2}T^{-1/2}S^{1/2}.$$

La TMS del acero por trigo, es decir, cuántas unidades de trigo la sociedad está dispuesta a sacrificar por una unidad adicional de acero manteniendo constante la utilidad, es:

$$\text{TMS}_{S,T} = \frac{UM_S}{UM_T}.$$

Sustituyendo las utilidades marginales:

$$\text{TMS}_{S,T} = \frac{\frac{1}{2}T^{1/2}S^{-1/2}}{\frac{1}{2}T^{-1/2}S^{1/2}}.$$

Cancelamos el factor 1/2:

$$\text{TMS}_{S,T} = \frac{T^{1/2}S^{-1/2}}{T^{-1/2}S^{1/2}}.$$

Agrupando potencias de $T$ y $S$:

$$\text{TMS}_{S,T} = T^{1/2-(-1/2)}S^{-1/2-1/2}.$$

Por tanto:

$$\text{TMS}_{S,T} = T^1S^{-1}.$$

Es decir:

$$\text{TMS}_{S,T} = \frac{T}{S}.$$

Esta expresión tiene una interpretación muy intuitiva. Si el país consume mucho trigo y poco acero, entonces $T/S$ es alto: el acero es relativamente escaso y la sociedad está dispuesta a sacrificar bastante trigo por una unidad adicional de acero. Si consume mucho acero y poco trigo, ocurre lo contrario.

La condición de tangencia queda:

$$\frac{T}{S} = 3.$$

De aquí obtenemos una relación entre trigo y acero en el consumo óptimo:

$$T = 3S.$$

Ahora usamos la recta de comercio:

$$3S + T = 300.$$

Sustituimos $T = 3S$:

$$3S + 3S = 300.$$

Sumando términos semejantes:

$$6S = 300.$$

Dividiendo por 6:

$$S = 50.$$

Por lo tanto:

$$S_c^* = 50.$$

Luego usamos la relación de tangencia:

$$T = 3S.$$

Sustituyendo $S = 50$:

$$T = 3(50).$$

Entonces:

$$T = 150.$$

Por tanto:

$$T_c^* = 150.$$

El óptimo de consumo con comercio es:

$$(S_c^*, T_c^*) = (50, 150).$$

Verifiquemos que la canasta cumple la recta de comercio:

$$3S_c^* + T_c^* = 3(50) + 150.$$

$$3S_c^* + T_c^* = 150 + 150 = 300.$$

Efectivamente, la canasta usa exactamente todo el ingreso nacional valuado a precios mundiales.

### 5.5.5. Método 2

El segundo método usa directamente la propiedad de las preferencias Cobb-Douglas.

La utilidad social es:

$$U(T, S) = T^{1/2} S^{1/2}.$$

Esta función Cobb-Douglas tiene exponentes:

$$\frac{1}{2} \quad \text{para trigo,}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{para acero.}$$

En una Cobb-Douglas de la forma:

$$U(T, S) = T^{\alpha} S^{1-\alpha},$$

la sociedad gasta la fracción $\alpha$ de su ingreso en $T$ y la fracción $1-\alpha$ en $S$. En este caso, ambos exponentes son iguales. Por eso la sociedad reparte el gasto en partes iguales:

$$\text{gasto en trigo} = \frac{1}{2}I,$$

$$\text{gasto en acero} = \frac{1}{2}I.$$

Como:

$$I = 300,$$

se obtiene:

$$\text{gasto en trigo} = \frac{1}{2}(300) = 150.$$

Y también:

$$\text{gasto en acero} = \frac{1}{2}(300) = 150.$$

El trigo es el numerario, por lo que:

$$p_T = 1.$$

Entonces el consumo óptimo de trigo es:

$$T_c^* = \frac{150}{1} = 150.$$

El acero tiene precio mundial relativo:

$$p_S = 3.$$

Por tanto, si el país gasta 150 unidades de valor en acero, consume:

$$S_c^* = \frac{150}{3} = 50.$$

Así llegamos nuevamente a:

$$(S_c^*, T_c^*) = (50, 150).$$

### 5.5.6. Resultado final

Ambos métodos entregan el mismo resultado:

$$(S_c^*, T_c^*) = (50, 150).$$

Esto no es casualidad. El método de tangencia y el atajo Cobb-Douglas son dos formas distintas de expresar la misma condición económica.

El método de tangencia dice que en el óptimo:

$$\frac{T}{S} = \frac{p_S}{p_T} = 3.$$

El atajo Cobb-Douglas dice que, como los exponentes son iguales, el país reparte su ingreso en partes iguales entre ambos bienes:

$$p_T T = 150, \qquad p_S S = 150.$$

Como $p_T = 1$ y $p_S = 3$, esto implica:

$$T = 150, \qquad 3S = 150.$$

Luego:

$$S = 50.$$

Ambas rutas llegan al mismo punto porque la regla de gasto Cobb-Douglas se deriva precisamente de la condición de tangencia entre curvas de indiferencia y restricción presupuestaria.

### 5.5.7. Interpretación económica

El resultado debe compararse con el punto de producción:

$$(S_p^*, T_p^*) = (100, 0).$$

Araucanía **produce** 100 unidades de acero y 0 unidades de trigo, pero **consume** 50 unidades de acero y 150 unidades de trigo:

$$(S_c^*, T_c^*) = (50, 150).$$

Por lo tanto, el comercio exterior se obtiene comparando consumo y producción.

Para el trigo:

$$\Delta T = T_c^* - T_p^* = 150 - 0 = 150.$$

Como $\Delta T > 0$, Araucanía **importa 150 unidades de trigo**.

Para el acero:

$$\Delta S = S_c^* - S_p^* = 50 - 100 = -50.$$

Como $\Delta S < 0$, Araucanía **exporta 50 unidades de acero**.

El valor de esas exportaciones es:

$$3 \cdot 50 = 150.$$

Ese valor financia exactamente las importaciones de trigo:

$$150 \text{ unidades de trigo.}$$

La mejora respecto de la autarquía surge porque Araucanía aprovecha su ventaja comparativa. Internamente, producir una unidad adicional de acero costaba 2 unidades de trigo. En el mercado mundial, una unidad de acero se intercambia por 3 unidades de trigo. Por eso es conveniente producir acero, exportar parte de él e importar trigo.

En autarquía, si Araucanía consumía $S = 50$, la FPP sólo permitía:

$$T = 200 - 2(50) = 100.$$

Con comercio, en cambio, puede consumir:

$$(S_c^*, T_c^*) = (50, 150).$$

Es decir, consume el mismo acero que en ese punto de comparación, pero 50 unidades más de trigo. Esa es la ganancia del comercio: no cambia la FPP, pero sí amplía el conjunto factible de consumo al permitir transformar acero en trigo a una tasa mundial más favorable.

#### 5.5.7.1. (b) Ganancias del comercio

La utilidad con comercio es

$$U^{com} = \sqrt{50 \cdot 150} \approx 86,60.$$

En autarquía habíamos obtenido:

$$U^{aut} = \sqrt{50 \cdot 100} \approx 70,71.$$

Entonces,

$$U^{com} > U^{aut}.$$

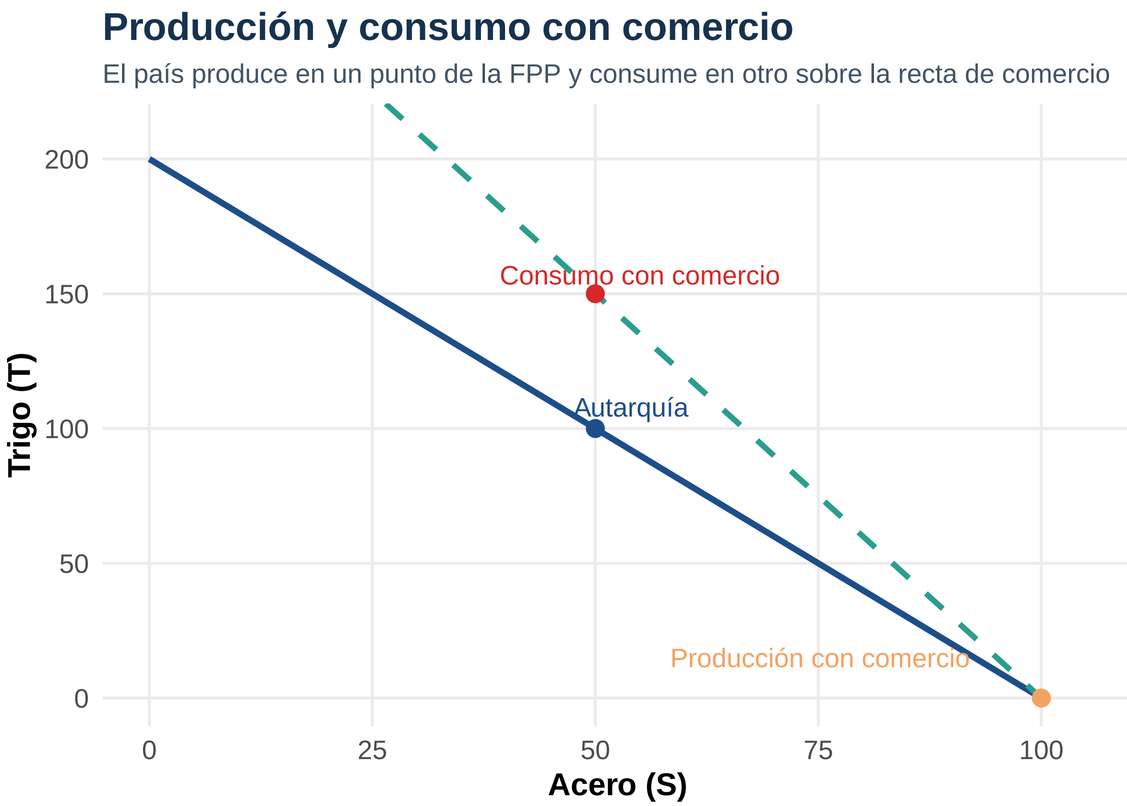
Esto muestra que el comercio genera **ganancias agregadas**. La razón económica es que el país produce donde le conviene más según los precios internacionales y después intercambia para consumir la combinación que más le gusta. Así, la producción queda guiada por la ventaja comparativa y el consumo por las preferencias.

#### 5.5.7.2. (c) Lectura del gráfico

En el gráfico deben distinguirse tres puntos:

- **Óptimo de autarquía**: está sobre la FPP y representa la mejor combinación posible cuando el país no comercia.
- **Óptimo de producción con comercio**: también está sobre la FPP, pero ahora el criterio es maximizar el valor de la producción a precios mundiales.
- **Óptimo de consumo con comercio**: está sobre la recta de comercio y queda fuera de la FPP.

La idea clave es que el país sigue estando limitado tecnológicamente por su FPP para producir, pero ya no para consumir. Gracias al comercio, puede alcanzar una curva de indiferencia más alta que en autarquía. Eso es exactamente lo que significa ganar con el comercio.




## 5.6. 5. Síntesis: flujos de comercio

### 5.6.1. Enunciado

**5. (Síntesis: flujos de comercio.)**
**(a)** Calcule cuánto trigo importa o exporta Araucanía: $\Delta T = T_c^* - T_p^*$. ¿Es positivo o negativo?
**(b)** Calcule cuánto acero importa o exporta: $\Delta S = S_c^* - S_p^*$.
**(c)** Verifique que el valor del intercambio está balanceado a precios mundiales: $3|\Delta S| = |\Delta T|$.
**(d)** Resuma en dos oraciones la lógica del resultado: ¿cómo logra el país consumir más allá de lo que produce?

### 5.6.2. Desarrollo

Los flujos de comercio se obtienen comparando la canasta de **consumo** con la canasta de **producción**. La regla es simple:

- si el consumo de un bien es mayor que su producción, el país lo **importa**;
- si el consumo es menor que la producción, el país lo **exporta**.

Antes de calcular los flujos, conviene recordar de dónde salen las dos canastas que se están comparando.

La canasta de **producción con comercio** viene del problema productivo:

$$(S_p^*, T_p^*) = (100, 0).$$

Esto significa que Araucanía se especializa completamente en acero: produce 100 unidades de acero y 0 unidades de trigo.

La canasta de **consumo con comercio** viene del problema de maximización de utilidad resuelto en el apartado anterior. Allí el país toma el ingreso generado por su producción, valuado a precios mundiales,

$$I = 3S_p^* + T_p^* = 3(100) + 0 = 300,$$

y elige la canasta preferida sobre la recta de comercio:

$$3S + T = 300.$$

Como la utilidad social es:

$$U(T, S) = T^{1/2} S^{1/2},$$

y ambos bienes tienen el mismo exponente, el óptimo de consumo reparte el gasto en partes iguales:

$$\text{gasto en acero} = 150, \qquad \text{gasto en trigo} = 150.$$

Entonces:

$$S_c^* = \frac{150}{3} = 50, \qquad T_c^* = \frac{150}{1} = 150.$$

Por eso la canasta de consumo que se usa para calcular los flujos es:

$$(S_c^*, T_c^*) = (50, 150).$$

En resumen, los valores de consumo **no aparecen de la nada**: salen del óptimo de consumo con comercio. Primero Araucanía produce acero para generar ingreso mundial; luego usa ese ingreso para elegir la combinación de acero y trigo que maximiza su utilidad.

#### 5.6.2.1. (a) Flujo de trigo

Para calcular el flujo de trigo comparamos:

- cuánto trigo **consume** Araucanía después de comerciar;
- cuánto trigo **produce** Araucanía en su punto de especialización.

Del óptimo de consumo con comercio sabemos que:

$$T_c^* = 150.$$

Ese valor sale de la recta de comercio y de la decisión óptima de consumo. Como el país tiene ingreso mundial $I = 300$ y la utilidad Cobb-Douglas reparte el gasto en mitades, destina 150 unidades de valor a trigo. Como el trigo es el numerario, su precio relativo es 1:

$$p_T = 1.$$

Por eso:

$$T_c^* = \frac{150}{1} = 150.$$

En cambio, del óptimo de producción con comercio sabemos que:

$$T_p^* = 0.$$

Ese valor aparece porque Araucanía se especializa completamente en acero: produce $(S_p^*, T_p^*) = (100, 0)$.

Ahora sí calculamos el flujo:

$$\Delta T = T_c^* - T_p^* = 150 - 0 = 150.$$

Como el resultado es positivo, Araucanía **importa trigo**. La lógica es directa: el país produce 0 unidades de trigo, pero quiere consumir 150 unidades. Esa diferencia no puede venir de producción interna, porque la producción interna de trigo es cero. Por tanto, debe venir desde el comercio exterior:

$$\text{trigo importado} = 150.$$

#### 5.6.2.2. (b) Flujo de acero

Para calcular el flujo de acero hacemos la misma comparación, pero ahora con el bien $S$.

Del óptimo de producción con comercio sabemos que:

$$S_p^* = 100.$$

Este valor sale de la especialización productiva: como el precio mundial del acero es relativamente alto, Araucanía produce el máximo acero posible sobre su FPP.

Del óptimo de consumo con comercio sabemos que:

$$S_c^* = 50.$$

¿De dónde sale este 50? Sale nuevamente del problema de consumo. El país tiene ingreso mundial:

$$I = 300.$$

Como la utilidad Cobb-Douglas es simétrica, destina la mitad de ese ingreso al acero:

$$\text{gasto en acero} = 150.$$

Pero cada unidad de acero cuesta 3 unidades de trigo a precios mundiales:

$$p_S = 3.$$

Entonces el acero que puede consumir con ese gasto es:

$$S_c^* = \frac{150}{3} = 50.$$

Ahora comparamos consumo y producción:

$$\Delta S = S_c^* - S_p^* = 50 - 100 = -50.$$

Como el resultado es negativo, Araucanía **exporta 50 unidades de acero**. El signo negativo no significa que consuma "acero negativo"; significa que el consumo interno es menor que la producción interna. Produce 100 unidades, pero sólo quiere consumir 50. La diferencia:

$$100 - 50 = 50$$

es el excedente de acero que vende al exterior. A precios mundiales, esas 50 unidades de acero financian la importación de trigo.

#### 5.6.2.3. (c) Balance del intercambio

A precios mundiales, 1 unidad de acero vale 3 unidades de trigo. Por eso el valor exportado en acero debe coincidir con el valor importado en trigo:

$$3|\Delta S| = 3 \cdot 50 = 150 = |\Delta T|.$$

Esto confirma que el intercambio está balanceado. Araucanía exporta 50 unidades de acero, y ese valor le alcanza exactamente para importar 150 unidades de trigo.

#### 5.6.2.4. (d) Síntesis económica

La lógica del resultado es que el país se especializa en el bien cuyo precio mundial le resulta relativamente más favorable. Después intercambia parte de esa producción y así accede a una canasta de consumo que queda por encima de su FPP, es decir, una canasta que no habría podido alcanzar en autarquía.

Tabla 13: Resumen de autarquía, producción y consumo con comercio

| situación | acero | trigo | utilidad |
|---|---|---|---|
| Autarquía | 50,00 | 100,00 | 70,71 |
| Producción con comercio | 100,00 | 0,00 | 0,00 |
| Consumo con comercio | 50,00 | 150,00 | 86,60 |

## 5.7. 6. Discusión: distribución de las ganancias del comercio

### 5.7.1. Enunciado

**6. (Discusión: distribución de las ganancias del comercio.)**
**(a)** El análisis anterior muestra que el país **en agregado** gana con el comercio. ¿Implica eso que **todos** los individuos dentro del país ganan? ¿Qué factores productivos podrían perder?
**(b)** Proponga al menos una política pública que permita capturar las ganancias agregadas del comercio y distribuirlas de modo que nadie quede peor que en autarquía (principio de compensación de Kaldor-Hicks).

### 5.7.2. Respuesta

No. Que el país gane **en agregado** no implica que **todos** ganen individualmente. Cuando la economía se especializa en acero, los factores productivos ligados a ese sector probablemente ganan: trabajadores especializados, dueños de capital específico y regiones donde ese sector es fuerte. Pero quienes estaban vinculados al sector trigo pueden perder ingresos, empleo o valor de sus activos.

Por tanto, las ganancias del comercio pueden venir acompañadas de **costos distributivos**. El comercio mejora el tamaño total de la torta, pero no garantiza por sí solo una distribución pareja de esa torta.

Una política pública coherente con el principio de **Kaldor-Hicks** sería usar parte de las ganancias agregadas del comercio para **compensar a los perdedores**. Por ejemplo:

- seguro de desempleo y reconversión laboral para trabajadores desplazados;
- subsidios temporales de ajuste para regiones afectadas;
- transferencias financiadas con parte de la mayor recaudación o con impuestos a las rentas extraordinarias del sector ganador.

La lógica de Kaldor-Hicks es: si las ganancias totales son suficientemente grandes como para compensar a quienes pierden y aun así dejar un saldo positivo, entonces el cambio puede considerarse socialmente deseable.

**Idea final de la guía:** en economía casi nunca basta con "saber calcular". También hay que distinguir entre posibilidad técnica, elección óptima, precios relativos, bienestar y distribución. Las matemáticas sirven para ordenar esas decisiones, no para reemplazar la interpretación económica.