Guía 2

Interacciones sociales, dilemas, equilibrio de Nash y acción colectiva

Yerson Olivares Bonilla

2026-04-21

Tabla de contenidos

1. Guía 2

Ramo: Política de las Políticas Públicas / Economía
Estudiante: Yerson Olivares Bonilla
Guía: Guía 2
Fecha: 21-04-2026

Cómo leer esta resolución. En cada ejercicio aparece primero el **enunciado**, luego una **explicación intuitiva**, después el **desarrollo formal paso a paso** y finalmente un **apoyo visual** mediante matrices, gráficos o tablas. La guía enfatiza la diferencia entre lo que es **estable individualmente** y lo que es **deseable colectivamente**.

2. Parte I. Comentarios conceptuales

2.1. 1. De la optimización individual a la interacción estratégica

2.1.1. Enunciado

> **(De la optimización individual a la interacción estratégica.)** En el Capítulo 3 de *The Economy*, Angèle optimizaba su tiempo de forma completamente autónoma: el resultado dependía sólo de sus propias elecciones. En el Capítulo 4, la situación cambia: los pescadores de un lago comparten el mismo recurso, y la captura de cada uno reduce lo disponible para los demás. Explique en qué consiste el tránsito de un problema de **optimización individual** a uno de **interacción estratégica**. ¿Por qué las herramientas del Capítulo 3 (restricción presupuestaria, curvas de indiferencia, tangencia) son insuficientes para analizar el segundo tipo de problema? ¿Qué nueva variable aparece en el problema de cada individuo?

2.1.2. Respuesta

En un problema de **optimización individual**, la persona toma como dados los precios, el ingreso, el tiempo o la tecnología. Elige la mejor opción dentro de un conjunto factible que no depende directamente de lo que haga otra persona. Por ejemplo, si una estudiante decide cuántas horas estudiar y descansar, su restricción principal es el total de horas disponibles.

En una **interacción estratégica**, en cambio, mi resultado depende también de lo que hagan otros. Si varios pescadores usan el mismo lago, la captura de cada uno depende del esfuerzo total, no sólo de su propio esfuerzo. Una hora extra de pesca puede beneficiar a quien la realiza, pero reduce la disponibilidad del recurso para los demás.

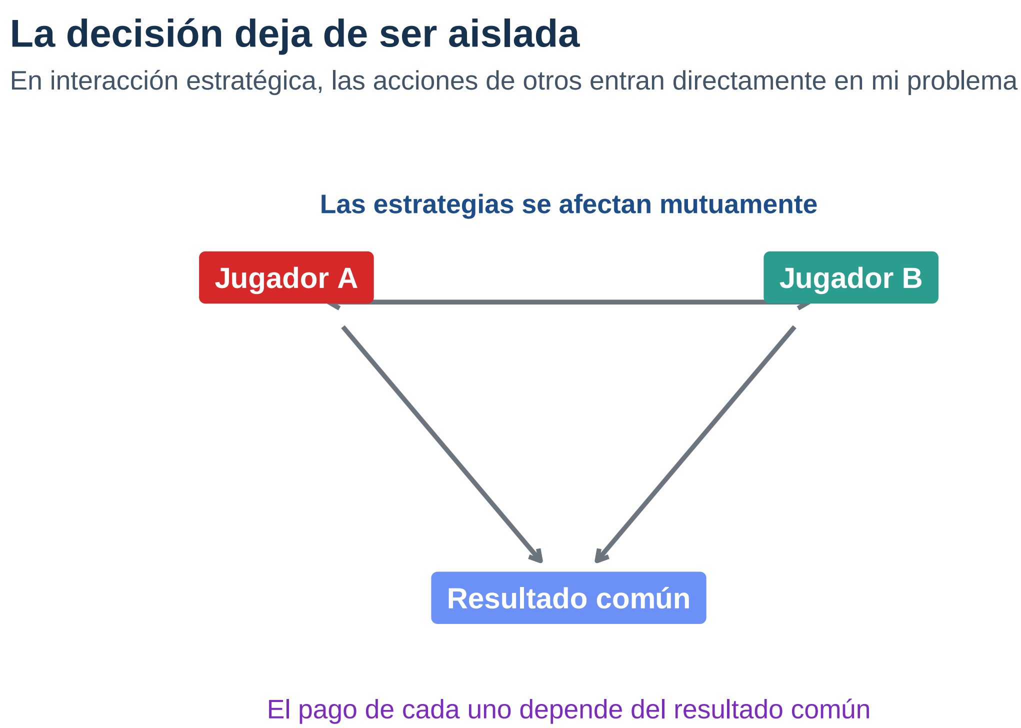
Por eso las herramientas del consumidor aislado no bastan. La tangencia entre una curva de indiferencia y una restricción presupuestaria sirve cuando el entorno se toma como fijo. En juegos estratégicos necesitamos describir **mejores respuestas mutuas**: qué me conviene hacer dado lo que tú haces, y qué te conviene hacer dado lo que yo hago.

La nueva variable clave es la **estrategia de los demás jugadores**. Ya no basta con preguntar "¿cuál es mi mejor elección?", sino "¿cuál es mi mejor elección dado lo que espero que hagan los otros?".

Tabla 1: Optimización individual versus interacción estratégica

dimensión	Optimización individual	Interacción estratégica
Variable relevante	Mi propia elección	Mi elección y la elección de otros

dimensión	Optimización individual	Interacción estratégica
Restricción	Precios, ingreso, tiempo o tecnología dados	El resultado cambia con las acciones ajenas
Herramienta central	Tangencia / elección óptima	Mejores respuestas / equilibrio de Nash
Pregunta económica	¿Qué canasta maximiza mi bienestar?	¿Qué hago si los demás actúan de cierta forma?



2.2. 2. Estrategia dominante y racionalidad individual

2.2.1. Enunciado

(Estrategia dominante y racionalidad.) Dos empresas, A y B, deben decidir si invertir en publicidad o no. Independientemente de lo que haga B, a la empresa A siempre le conviene hacer publicidad (sus ganancias son mayores en ese caso).

Comente: ¿qué es una **estrategia dominante**? Si ambas empresas tienen una estrategia dominante que las lleva a hacer publicidad, ¿es el resultado necesariamente óptimo para el sector en su conjunto? ¿Qué revela este caso sobre la relación entre racionalidad individual y bienestar colectivo?

2.2.2. Respuesta

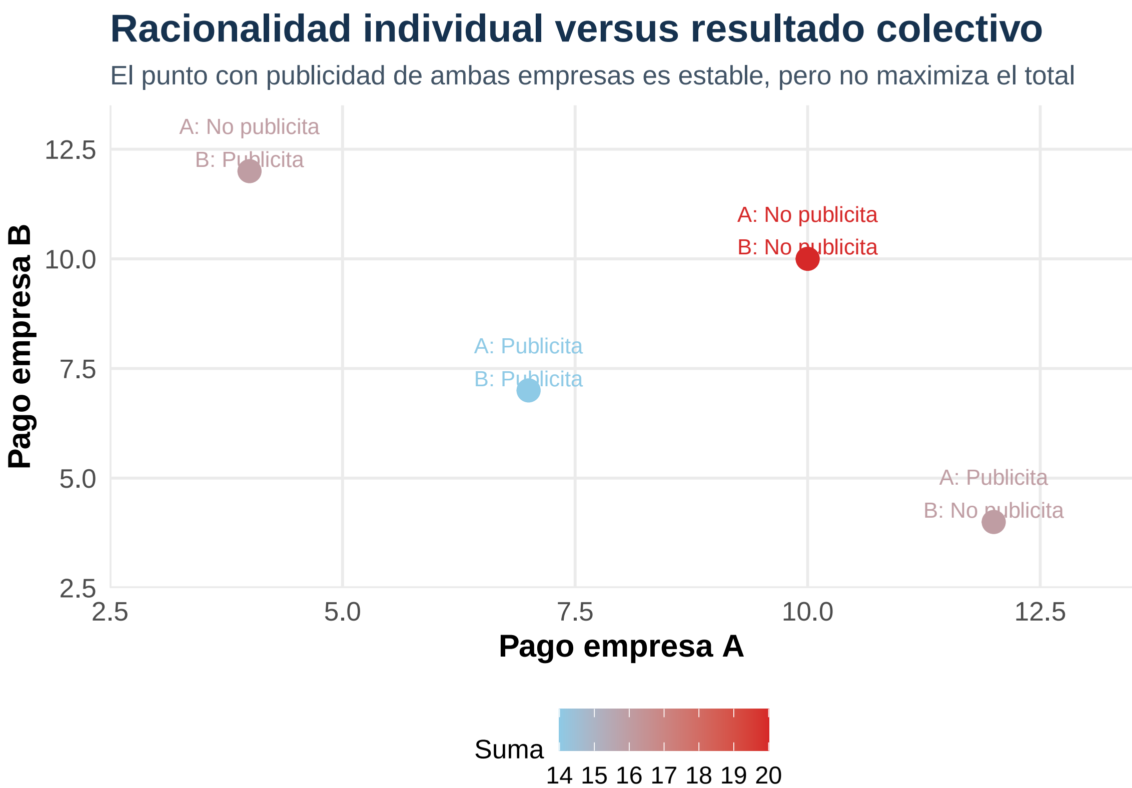
Una **estrategia dominante** es una acción que entrega un pago al menos tan alto como las demás acciones, **sin importar lo que haga el otro jugador**. Si hacer publicidad es mejor para la empresa A tanto cuando B hace publicidad como cuando B no la hace, entonces "hacer publicidad" domina a "no hacer publicidad".

Pero que una estrategia sea racional individualmente no significa que el resultado sea óptimo para todos. Si ambas empresas hacen publicidad, podrían gastar mucho en una carrera competitiva que no aumenta la demanda total del sector, sino que sólo redistribuye clientes. Cada empresa teme perder participación de mercado si no publicita, pero cuando ambas lo hacen el gasto total puede reducir las ganancias de las dos.

La lección es central: **racionalidad individual no garantiza bienestar colectivo**. El equilibrio puede ser estable porque nadie quiere desviarse unilateralmente, aunque exista otra combinación que habría sido mejor para el grupo.

Tabla 2: Ejemplo: publicitar puede ser dominante, pero no maximiza el pago conjunto

A	B	pago_A	pago_B	total
No publicita	No publicita	10	10	20
No publicita	Publicita	4	12	16
Publicita	No publicita	12	4	16
Publicita	Publicita	7	7	14



2.3. 3. Equilibrio de Nash: estabilidad, no óptimo

2.3.1. Enunciado

> **(Equilibrio de Nash: estabilidad, no óptimo.)** Un economista define el equilibrio de Nash como "la mejor respuesta de cada jugador dada la estrategia del otro." Un estudiante comenta: "Entonces el equilibrio de Nash debe ser el mejor resultado posible para todos." Comente la afirmación del estudiante. ¿Es el equilibrio de Nash siempre eficiente en el sentido de Pareto? Construya un ejemplo sencillo (una matriz de pagos $2imes2$) en que el equilibrio de Nash es único pero no es óptimo de Pareto, y otro en que sí lo es. ¿Qué propiedad de **estabilidad** tiene el equilibrio de Nash aunque no sea eficiente?

2.3.2. Respuesta

La afirmación del estudiante confunde **estabilidad** con **eficiencia**. Un equilibrio de Nash es una combinación de estrategias en la que nadie puede mejorar cambiando sólo su propia estrategia. Eso no implica que el resultado sea el mejor posible para todos.

Puede ocurrir que todos estén atrapados en una situación mala: si cada uno mejora sólo desviándose, empeora; pero si todos pudieran coordinarse, llegarían a un resultado superior. Esa es la lógica del dilema del prisionero.

Formalmente, un perfil de estrategias s^* es equilibrio de Nash si, para cada jugador i,

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \text{para toda estrategia alternativa } s_i.$$

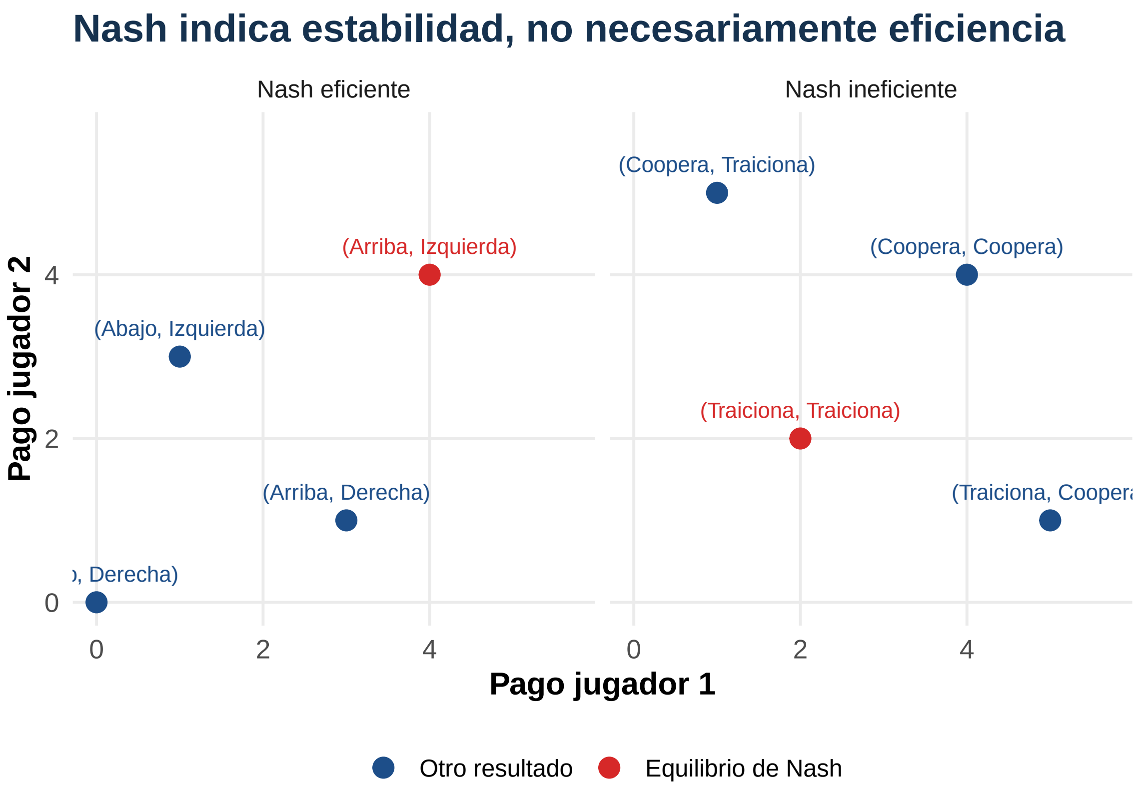
La propiedad importante es la **no desviación unilateral rentable**. El equilibrio es estable porque, dado lo que hacen los demás, cada jugador ya está haciendo lo mejor para sí mismo. Pero puede ser ineficiente en Pareto si existe otro resultado que mejora a alguien sin empeorar a nadie, o incluso mejora a todos.

Tabla 3: Ejemplo 1: Nash único, pero ineficiente

Jugador_1	Jugador_2	pago_1	pago_2	tipo
Coopera	Coopera	4	4	Óptimo de Pareto
Coopera	Traiciona	1	5	
Traiciona	Coopera	5	1	
Traiciona	Traiciona	2	2	Nash único

Tabla 4: Ejemplo 2: Nash único y Pareto eficiente

Jugador_1	Jugador_2	pago_1	pago_2	tipo
Arriba	Izquierda	4	4	Nash único y Pareto eficiente
Arriba	Derecha	3	1	
Abajo	Izquierda	1	3	
Abajo	Derecha	0	0	



2.4. 4. El dilema del prisionero como arquetipo de falla de coordinación

2.4.1. Enunciado

> **(El dilema del prisionero como arquetipo de falla de coordinación.)** Dos vecinos, Rodrigo y Sol, deben decidir si limpiar o no la vereda que comparten. Si ambos limpian, la calle queda impecable y cada uno obtiene bienestar 4. Si ninguno limpia, la vereda está sucia y cada uno obtiene 1. Si sólo uno limpia (costo personal 2), el que no limpia obtiene 3 y el que limpia obtiene 1. Construya la matriz de pagos, identifique las estrategias dominantes y el equilibrio de Nash. ¿Es el equilibrio de Nash óptimo de Pareto? ¿Qué característica estructural de los pagos genera el dilema? ¿Cambia el resultado si los vecinos interactúan repetidamente?

2.4.2. Respuesta

La matriz de pagos es la siguiente:

Tabla 5: Matriz de pagos: limpieza de la vereda

Rodrigo	Sol	pago_Rodrigo	pago_Sol
Limpia	Limpia	4	4
Limpia	No limpia	1	3
No limpia	Limpia	3	1
No limpia	No limpia	1	1

Con los pagos exactos del enunciado, para Rodrigo ocurre lo siguiente:

- si Sol limpia, Rodrigo prefiere limpiar: obtiene 4 en vez de 3;
- si Sol no limpia, Rodrigo queda indiferente: obtiene 1 limpiando y 1 no limpiando.

Entonces **limpiar es una estrategia débilmente dominante** para Rodrigo: nunca le va peor y a veces le va mejor. Por simetría, también es débilmente dominante para Sol.

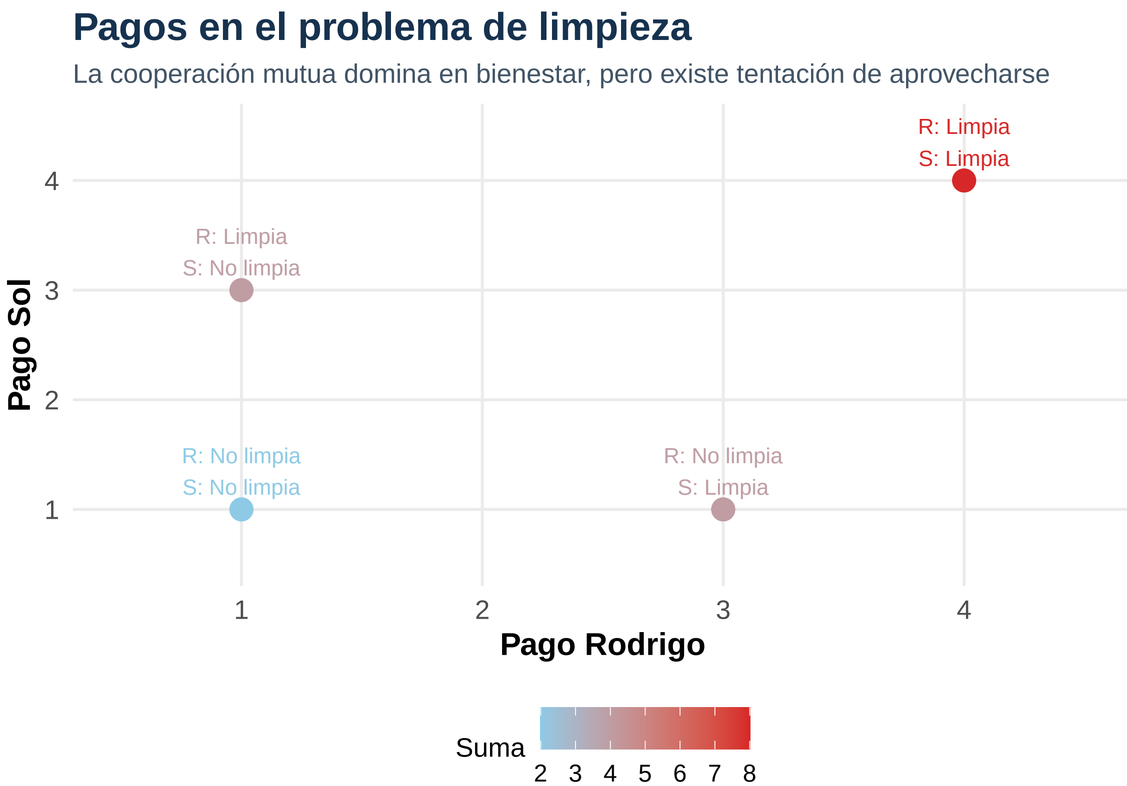
Los equilibrios de Nash son:

- $(\text{Limpia}, \text{Limpia})$: nadie quiere desviarse, porque pasar de limpiar a no limpiar baja el pago de 4 a 3;
- $(\text{No limpia}, \text{No limpia})$: con los pagos exactos, cada uno está indiferente entre limpiar o no limpiar si el otro no limpia, por lo que no hay una desviación unilateral estrictamente rentable.

El resultado $(\text{Limpia}, \text{Limpia})$ es Pareto superior a $(\text{No limpia}, \text{No limpia})$, porque ambos pasan de 1 a 4. El dilema aparece porque existe una tentación de **free rider**: cuando el otro limpia, conviene no limpiar y recibir parte del beneficio sin asumir el costo.

Nota importante. Este ejercicio es un dilema social débil, no un dilema del prisionero estrictamente clásico. En un dilema del prisionero estricto, “no cooperar” domina estrictamente. Aquí, con los números dados, limpiar domina débilmente porque cuando el otro no limpia hay empate. Si una mínima molestia adicional hiciera que limpiar sólo cuando el otro no limpia pagara menos que 1, entonces $(\text{No limpia}, \text{No limpia})$ sería el único Nash ineficiente.

Si la interacción se repite, cambian los incentivos. Los vecinos pueden castigar al que se aprovecha, construir reputación o coordinar turnos de limpieza. La repetición transforma una decisión aislada en una relación: el costo de aprovecharse hoy puede ser perder cooperación mañana.



2.5. 5. Dilemas sociales y la lógica del free rider

2.5.1. Enunciado

(Dilemas sociales y la lógica del free rider.) En un edificio de diez departamentos se propone contratar vigilancia privada. El servicio beneficia a todos por igual (es no rival y no excluyente entre los residentes del edificio), pero cada residente tiene incentivos a no pagar esperando que los demás lo hagan. Explique cómo este problema puede entenderse como un dilema social. ¿Cuál es la analogía con el dilema del prisionero cuando hay más de dos jugadores? ¿Por qué la provisión voluntaria tiende a ser subóptima? Proponga dos mecanismos concretos que podrían resolver el problema en este edificio.

2.5.2. Respuesta

Este es un dilema social porque cada residente compara el costo privado de pagar vigilancia con el beneficio privado adicional que recibe. Como la vigilancia beneficia a todos los residentes del edificio, incluso a quienes no pagan, aparece el incentivo a comportarse como **free rider**: esperar que los demás financien el servicio y disfrutarlo igual.

La analogía con el dilema del prisionero es que la acción individualmente tentadora —no pagar— puede llevar a un resultado colectivamente malo. Si muchos razonan igual, la vigilancia no se contrata o se contrata a un nivel insuficiente, aunque el beneficio total para el edificio sea mayor que el costo total.

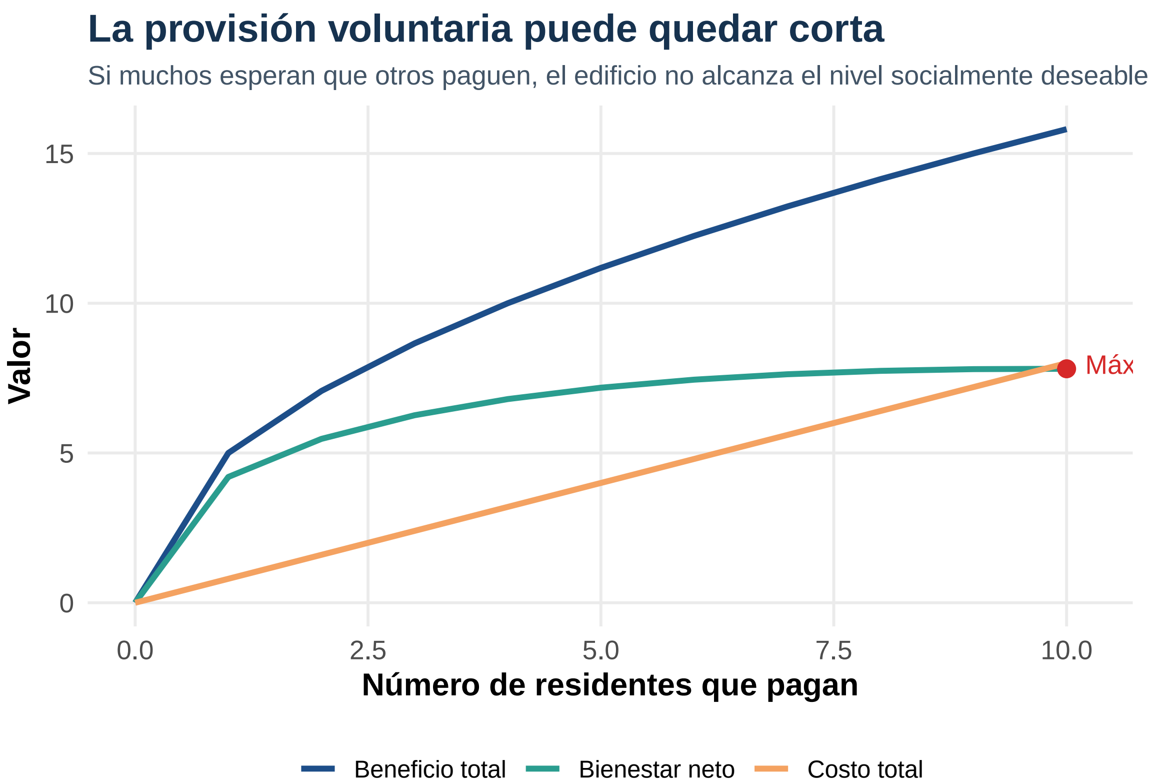
La provisión voluntaria tiende a ser subóptima porque cada persona no internaliza completamente el beneficio que su pago genera en los demás. Su aporte financia un bien que todos disfrutan, pero la persona sólo considera su propia parte del beneficio.

Dos mecanismos concretos para resolver el problema son:

1. **Cuota obligatoria de gastos comunes:** todos pagan una proporción definida y el servicio se financia como gasto colectivo.
2. **Reglas con monitoreo y sanción:** por ejemplo, registrar pagos, aplicar multas por morosidad o restringir beneficios complementarios legalmente excluibles.

Tabla 6: Lógica del free rider en el edificio

elemento	interpretación
Bien	Vigilancia: no rival dentro del edificio y difícilmente excluible entre residentes
Incentivo individual	No pagar y esperar que otros financien el servicio
Resultado agregado	Subprovisión o ausencia de vigilancia
Solución institucional	Cuotas obligatorias, monitoreo, sanciones y acuerdos vinculantes



2.6. 6. Tragedia de los comunes y derechos de propiedad

2.6.1. Enunciado

(Tragedia de los comunes y derechos de propiedad.) Garrett Hardin argumentó que los recursos de propiedad común están condenados a la sobreexplotación, porque cada usuario tiene incentivos a apropiarse de más recurso antes que los demás lo hagan. Elinor Ostrom mostró que, en la práctica, muchas comunidades resuelven este problema sin privatizar ni estatizar el recurso. Comente ambas posturas: ¿bajo qué condiciones se cumple la predicción de Hardin?, ¿qué mecanismos identificó Ostrom como claves para la gestión sustentable de comunes? ¿Qué rol juegan la confianza, la reputación y la repetición en esos mecanismos?

2.6.2. Respuesta

La predicción de Hardin se cumple especialmente cuando hay **acceso libre**, ausencia de reglas, bajo monitoreo y usuarios anónimos o poco conectados entre sí. En ese contexto, cada persona captura el beneficio privado de usar más el recurso, pero reparte el costo de agotarlo entre todos. Por eso el recurso se sobreexplota.

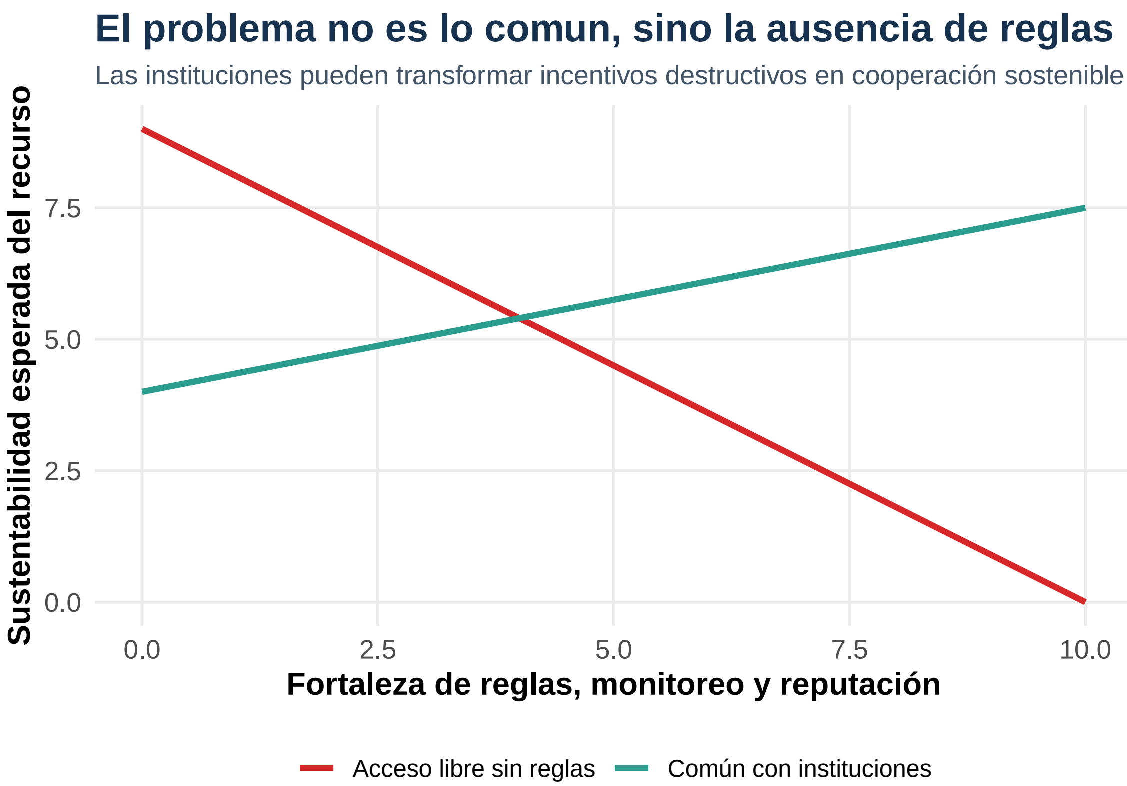
Ostrom muestra que el fracaso no proviene de que el recurso sea común en sí mismo, sino de la falta de **instituciones efectivas**. Muchas comunidades logran sostener recursos comunes cuando existen:

- límites claros sobre quién puede usar el recurso;
- reglas adaptadas al contexto local;
- monitoreo por parte de los propios usuarios;
- sanciones graduales para quienes incumplen;
- mecanismos baratos de resolución de conflictos;
- reconocimiento externo del derecho de la comunidad a organizarse.

La confianza y la reputación importan porque hacen que la cooperación sea creíble. Si las personas se conocen, interactúan repetidamente y pueden castigar desviaciones, entonces apropiarse de más recurso hoy puede ser costoso mañana.

Tabla 7: Dos miradas sobre la gestión de recursos comunes

enfoque	diagnóstico	mecanismo_clave
Hardin	Sin reglas, el acceso libre genera sobreexplotación	Cada usuario internaliza beneficios privados e ignora costos externos
Ostrom	Los comunes pueden sostenerse con instituciones comunitarias efectivas	Reglas, monitoreo, sanciones graduales, confianza y reputación



2.7. 7. Preferencias sociales: más allá del interés propio

2.7.1. Enunciado

(Preferencias sociales: más allá del interés propio.) Los modelos estándar de teoría de juegos suponen que cada jugador maximiza **exclusivamente** su propio pago. Sin embargo, experimentos del juego del ultimátum muestran que muchas personas rechazan ofertas que consideran injustas, aunque eso implique un pago menor para ellas mismas. Comente: ¿qué tipos de **preferencias sociales** podrían explicar este comportamiento (altruismo, aversión a la inequidad, reciprocidad)? ¿Cómo cambia el equilibrio del dilema del prisionero si los jugadores tienen preferencias altruistas? ¿Puede el interés propio ilustrado (*enlightened self-interest*) resolver dilemas sociales sin necesidad de preferencias altruistas?

2.7.2. Respuesta

El juego del ultimátum muestra que las personas no siempre maximizan sólo dinero. Muchas rechazan ofertas muy desiguales porque también valoran justicia, reciprocidad, dignidad o castigo a conductas abusivas.

Tres tipos de preferencias sociales ayudan a explicar esto:

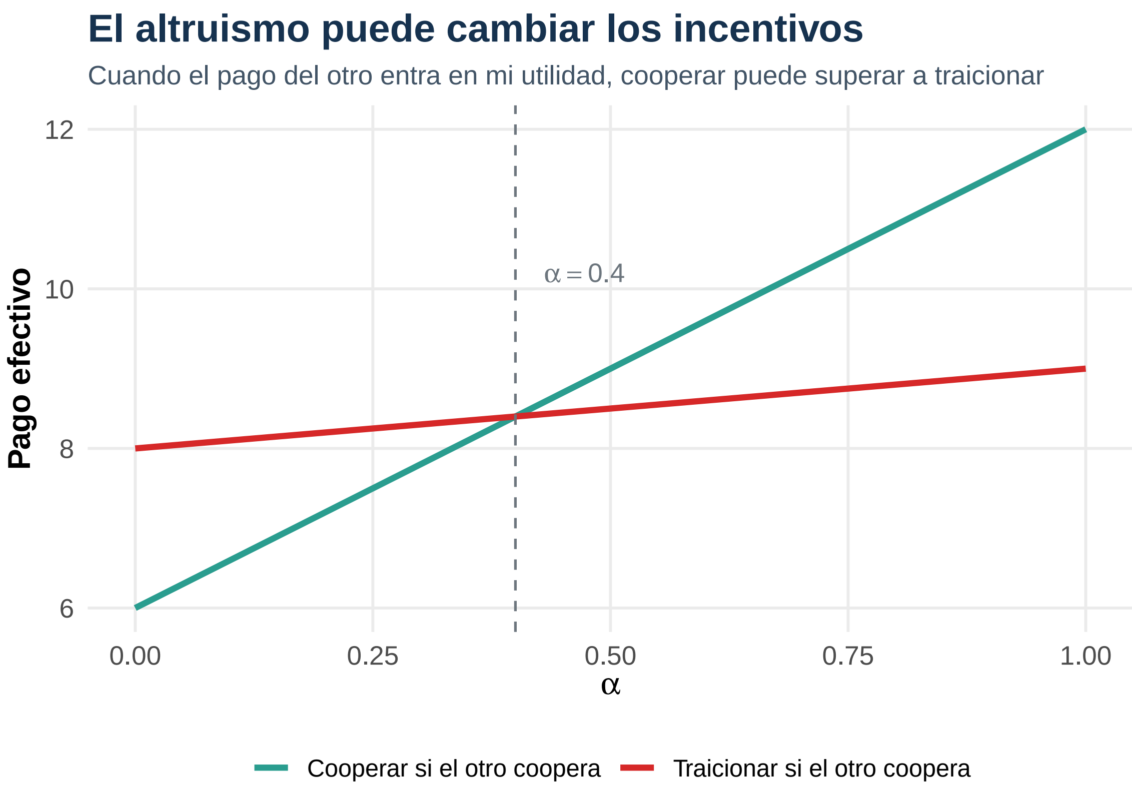
- **Altruismo:** me importa positivamente el bienestar del otro.
- **Aversión a la inequidad:** me molesta que la distribución sea demasiado desigual, incluso si yo recibo algo.
- **Reciprocidad:** respondo amablemente a acciones justas y castigo acciones abusivas.

En un dilema del prisionero, el altruismo puede debilitar el incentivo a traicionar. Si mi utilidad incluye parte de tu pago, dañar tu resultado también reduce mi utilidad efectiva. Con suficiente altruismo, cooperar puede volverse una mejor respuesta.

Pero no siempre se necesita altruismo puro. El **interés propio ilustrado** también puede sostener cooperación cuando las interacciones se repiten. Si traicionar hoy destruye confianza, reputación o cooperación futura, entonces cooperar puede ser racional incluso para alguien egoísta.

Tabla 8: Preferencias sociales y cooperación

preferencia	lógica	efecto_en_dilemas
Altruismo	Me importa positivamente el pago del otro	Reduce la ganancia psicológica de traicionar
Aversión a la inequidad	Me incomoda una distribución injusta o muy desigual	Hace costosas las ventajas obtenidas injustamente
Reciprocidad	Premio cooperación y castigo abuso	Permite castigos sociales creíbles
Interés propio ilustrado	Coopero hoy para preservar beneficios futuros	La reputación vuelve rentable la cooperación



2.8. 8. Juegos de coordinación y equilibrios múltiples

2.8.1. Enunciado

(Juegos de coordinación y equilibrios múltiples.) Dos conductores se acercan a una intersección sin semáforo. Si ambos ceden el paso, cada uno llega tardío (pago 1 cada uno). Si ambos avanzan, chocan (pago -5 cada uno). Si uno cede y el otro avanza, quien avanza llega a tiempo (pago 3) y quien cede llega tarde (pago 1). Construya la matriz de pagos e identifique todos los equilibrios de Nash. ¿Cuántos hay? ¿Son eficientes? ¿Qué mecanismo social (norma, señal, convención) permite a los conductores coordinar hacia un equilibrio único? ¿Qué nos dice este juego sobre el valor económico de las instituciones y convenciones sociales?

2.8.2. Respuesta

La matriz de pagos es:

Tabla 9: Matriz de pagos: intersección sin semáforo

Conductor_1	Conductor_2	pago_1	pago_2
Cede	Cede	1	1
Cede	Avanza	1	3
Avanza	Cede	3	1
Avanza	Avanza	-5	-5

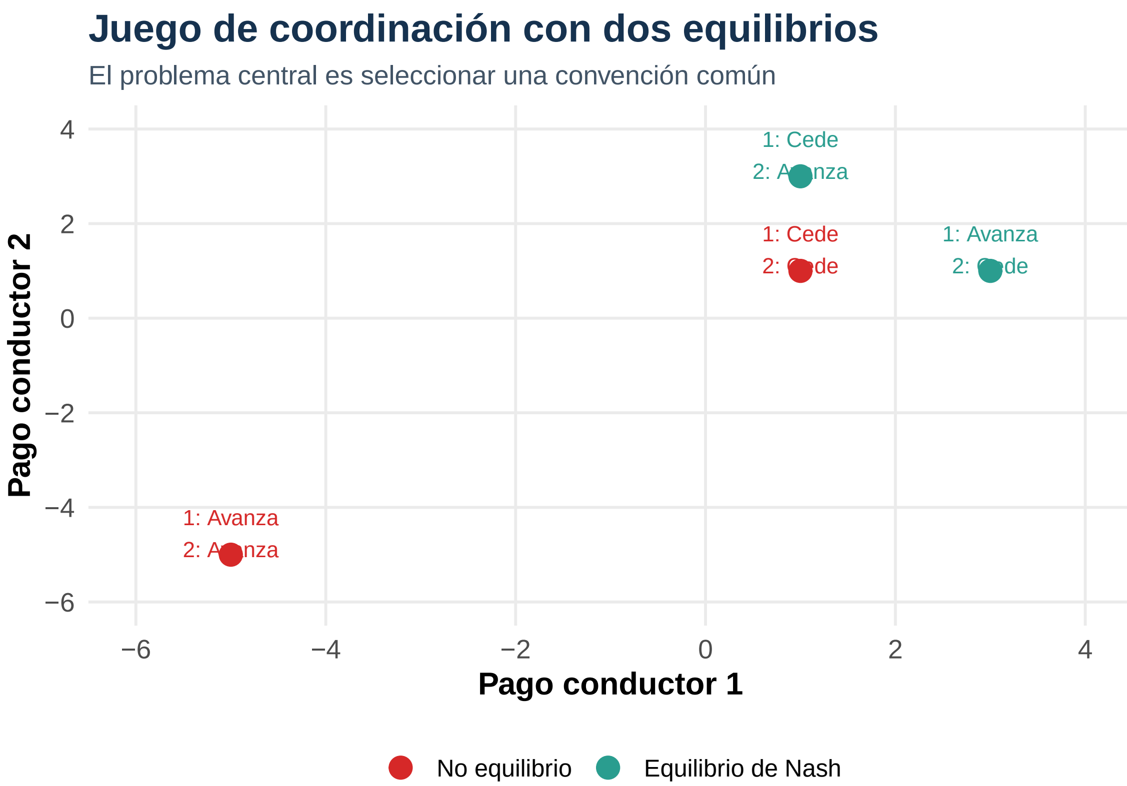
Hay dos equilibrios de Nash:

$$(\text{Cede}, \text{Avanza}) \quad \text{y} \quad (\text{Avanza}, \text{Cede}).$$

En ambos casos, quien avanza no quiere ceder porque bajaría de 3 a 1. Quien cede no quiere avanzar porque provocaría choque y bajaría de 1 a -5. Por tanto, ambos perfiles son estables.

Estos equilibrios son eficientes en el sentido de Pareto dentro del juego: no hay otro resultado que mejore a ambos simultáneamente. El problema no es egoísmo puro, sino **coordinación**: hay que seleccionar quién pasa y quién espera.

Las instituciones y convenciones sociales reducen la incertidumbre. Una señal de tránsito, una regla como "el que viene por la derecha tiene preferencia", una rotonda o una convención local transforman múltiples equilibrios posibles en una regla clara. Eso tiene valor económico porque evita accidentes, demoras y costos de negociación en cada encuentro.



2.9. 9. Juegos repetidos y cooperación sostenida

2.9.1. Enunciado

> **(Juegos repetidos y cooperación sostenida.)** En el dilema del prisionero de una sola ronda, la estrategia dominante es traicionar (o no cooperar). Sin embargo, cuando el juego se repite indefinidamente, la cooperación puede sostenerse como equilibrio. Explique intuitivamente cómo la estrategia de **ojo por ojo** (*tit for tat*) puede sostener la cooperación en un juego repetido. ¿Qué condición sobre la **tasa de descuento** (o paciencia de los jugadores) es necesaria para que la cooperación sea un equilibrio? ¿Qué ocurre con la cooperación si los jugadores saben de antemano cuándo termina el juego (horizonte finito y conocido)?

2.9.2. Respuesta

En un juego de una sola ronda, traicionar puede ser dominante porque no hay futuro que castigue la desviación. En un juego repetido, en cambio, la acción de hoy afecta la respuesta de mañana.

La estrategia **ojo por ojo** (*tit for tat*) consiste en cooperar al comienzo y luego imitar la acción previa del otro jugador. Si el otro coopera, sigo cooperando. Si el otro traiciona, lo castigo traicionando en la siguiente ronda. Esta regla puede sostener cooperación porque transforma la traición de corto plazo en pérdida de beneficios futuros.

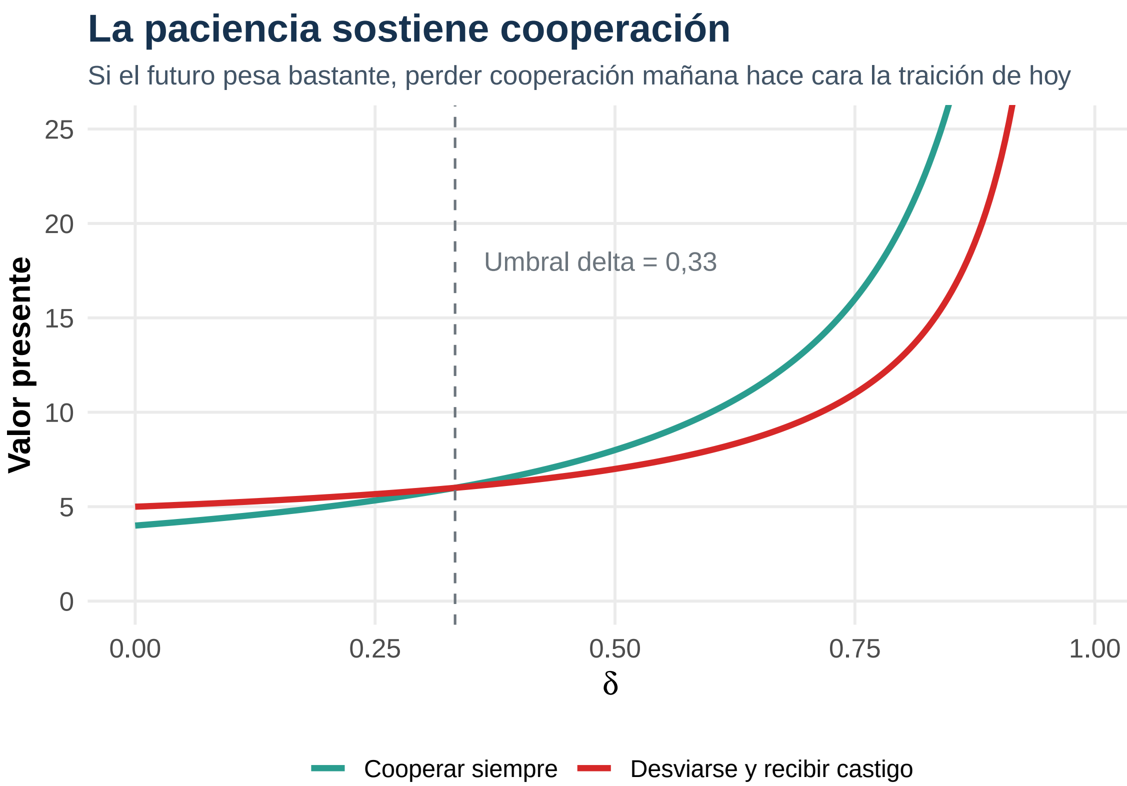
La condición central es que los jugadores sean suficientemente pacientes. Si δ es la tasa de descuento, cooperar se sostiene cuando el valor presente de seguir cooperando supera la ganancia inmediata de traicionar. En una versión simple con castigo permanente:

$$\frac{R}{1-\delta} \geq T + \frac{\delta P}{1-\delta},$$

donde R es el pago por cooperación mutua, T el pago de traicionar cuando el otro coopera y P el pago de castigo. Despejando:

$$\delta \geq \frac{T-R}{T-P}.$$

Si el horizonte es finito y conocido, aparece el razonamiento hacia atrás. En la última ronda conviene traicionar, porque no hay futuro que castigue. Sabiendo eso, en la penúltima también conviene traicionar, y así sucesivamente. Por eso, con horizonte finito conocido, la cooperación es mucho más difícil de sostener.



2.10. 10. Instituciones como soluciones a dilemas sociales

2.10.1. Enunciado

(Instituciones como soluciones a dilemas sociales.) Un asesor presidencial propone eliminar todas las regulaciones ambientales argumentando que "el mercado libre resuelve sólo los problemas de contaminación, porque a nadie le conviene vivir en un ambiente sucio." Comente la afirmación utilizando los conceptos del Capítulo 4: ¿por qué la contaminación puede modelarse como un dilema social o un problema de acción colectiva?, ¿en qué situaciones el mercado **no** resuelve el problema sin intervención?, y ¿qué tipos de instituciones (impuestos, regulación, acuerdos voluntarios, normas sociales) pueden corregir la falla y bajo qué condiciones cada una funciona mejor?

2.10.2. Respuesta

La afirmación es incompleta. Es verdad que a nadie le conviene vivir en un ambiente contaminado, pero eso no significa que cada agente individual tenga incentivos suficientes para reducir su propia contaminación.

La contaminación es un dilema social porque el beneficio privado de contaminar —producir más barato, evitar filtros o ahorrar costos— lo recibe quien contamina, mientras que el costo se reparte entre muchas personas. Si ese costo externo no entra en la decisión privada, el mercado genera demasiada contaminación.

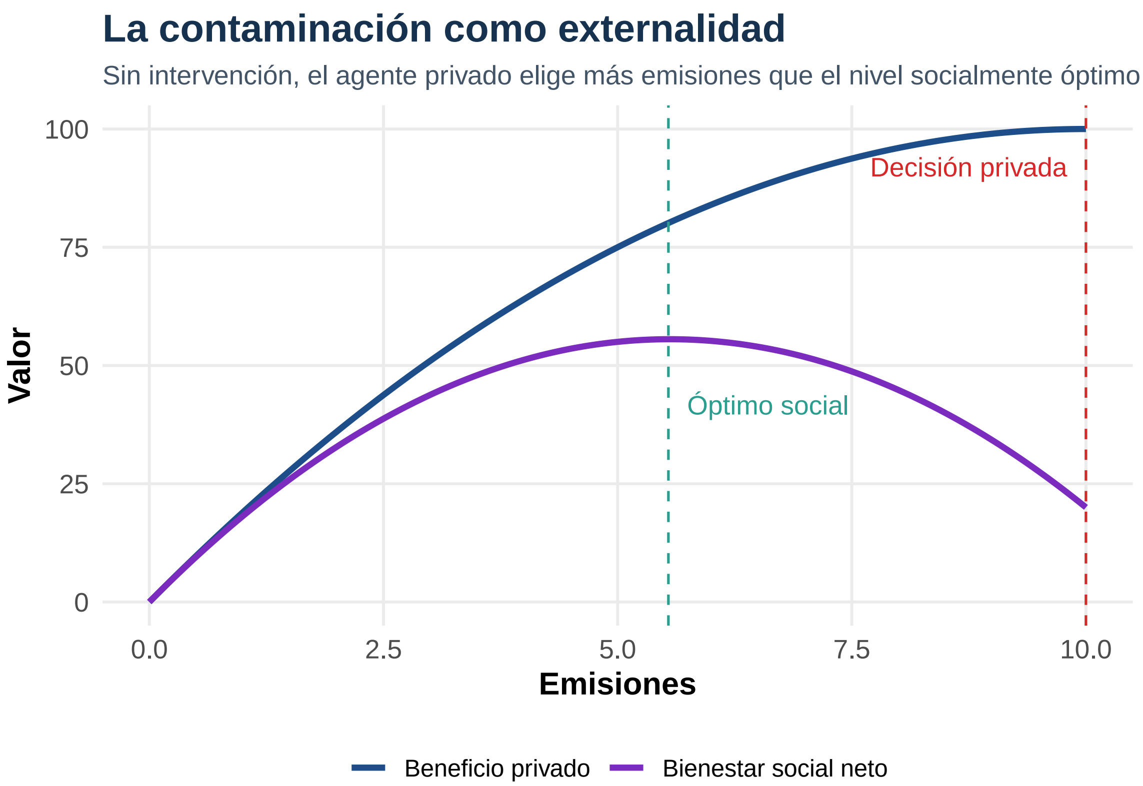
El mercado no resuelve el problema por sí sólo cuando:

- los derechos de propiedad sobre el aire, el agua o el ambiente son difusos;
- hay muchos afectados y coordinarse es costoso;
- la información sobre daños es imperfecta;
- no existen mecanismos creíbles de compensación o negociación;
- los costos externos no están incluidos en precios.

Las instituciones buscan cambiar incentivos. Un impuesto ambiental obliga a internalizar el daño marginal. Una regulación directa fija estándares mínimos. Las cuotas o permisos transables limitan la cantidad total de emisiones. Los acuerdos voluntarios funcionan mejor cuando hay pocos actores, buena reputación y monitoreo. Las normas sociales ayudan cuando la comunidad puede observar y sancionar conductas contaminantes.

Tabla 10: Instituciones para corregir dilemas ambientales

instrumento	cuándo_funciona_mejor	efecto
Impuesto ambiental	Cuando el daño marginal puede estimarse y cobrarse	Sube el costo privado de contaminar
Regulación directa	Cuando hay umbrales sanitarios o tecnológicos claros	Prohíbe o limita acciones dañinas
Permisos o cuotas	Cuando importa controlar una cantidad total de emisiones	Crea escasez legal de emisiones
Acuerdos voluntarios	Cuando hay pocos actores, confianza y monitoreo	Coordina compromisos creíbles
Normas sociales	Cuando la conducta es observable y la reputación importa	Introduce sanciones sociales o reputacionales



3. Parte II. Matemático I: Dilema del prisionero, Nash y óptimo social

3.1. Contexto

Dos empresas, Alfa y Beta, son los únicos productores de un químico industrial. Cada empresa debe decidir si produce una cantidad **Alta** (A) o **Baja** (B) de contaminación (es decir, si instala o no filtros de limpieza). Los pagos (beneficio neto en millones de pesos) son los siguientes:

Tabla 11: Matriz de pagos original

Alfa	Beta	Pago Alfa	Pago Beta
B	B	6	6
B	A	1	8
A	B	8	1
A	A	3	3

3.2. 1. Lectura de la matriz

3.2.1. Enunciado

(Lectura de la matriz.)

(a) Identifique las cuatro posibles combinaciones de estrategias y el pago asociado a cada empresa en cada caso. ¿Qué combinación maximiza la suma total de pagos?

(b) ¿Por qué la combinación (A, A) es la peor para el conjunto de las dos empresas, pero cada empresa tiene incentivos a elegirla individualmente?

3.2.2. Respuesta

Las cuatro combinaciones son:

- (B, B): ambas instalan filtros; cada una recibe 6.
- (B, A): Alfa instala filtros y Beta no; Alfa recibe 1 y Beta 8.
- (A, B): Alfa no instala filtros y Beta sí; Alfa recibe 8 y Beta 1.
- (A, A): ninguna instala filtros; cada una recibe 3.

La suma total de pagos se maximiza en (B, B):

$$W(B, B) = 6 + 6 = 12.$$

En cambio, en (A, A) el bienestar conjunto es:

$$W(A, A) = 3 + 3 = 6.$$

(A, A) es malo para el conjunto porque ambas contaminan y pierden el beneficio social de reducir contaminación. Pero es tentador individualmente porque, si la otra empresa instala filtros, desviarse a A permite subir de 6 a 8. Cada empresa captura el ahorro privado de no instalar filtros, pero no internaliza completamente el daño que genera.

Tabla 12: Suma de pagos por resultado

Alfa	Beta	pago_alfa	pago_beta	total
B	B	6	6	12
B	A	1	8	9
A	B	8	1	9
A	A	3	3	6

3.3. 2. Estrategias dominantes

3.3.1. Enunciado

(Estrategias dominantes.)

(a) Para Alfa: si Beta juega B, ¿qué le conviene a Alfa? Si Beta juega A, ¿qué le conviene a Alfa? ¿Tiene Alfa una estrategia dominante? Justifique.

(b) Repita el análisis para Beta. ¿Tiene Beta una estrategia dominante?

(c) Concluya: ¿el razonamiento de estrategia dominante lleva a un resultado único? ¿Cuál?

3.3.2. Respuesta

Para Alfa:

- si Beta juega B, Alfa compara 6 jugando B con 8 jugando A. Prefiere A;
- si Beta juega A, Alfa compara 1 jugando B con 3 jugando A. Prefiere A.

Por tanto, A es estrategia dominante para Alfa.

Para Beta ocurre lo mismo por simetría:

- si Alfa juega B, Beta obtiene 6 con B y 8 con A. Prefiere A;
- si Alfa juega A, Beta obtiene 1 con B y 3 con A. Prefiere A.

Entonces A también es estrategia dominante para Beta. El razonamiento por estrategia dominante lleva al resultado único:

$$(A, A).$$

Tabla 13: Comparación de mejores respuestas

jugador	si rival juega	pago si juega B	pago si juega A	mejor respuesta
Alfa	B	6	8	A
Alfa	A	1	3	A
Beta	B	6	8	A
Beta	A	1	3	A

3.4. 3. Equilibrio de Nash

3.4.1. Enunciado

(Equilibrio de Nash.)

(a) Defina formalmente el equilibrio de Nash para este juego: una combinación de estrategias (s_α^*, s_β^*) tal que ninguna empresa desea desviarse unilateralmente.

(b) Verifique que (A, A) es el único equilibrio de Nash comprobando, celda por celda, que ninguna empresa quiere desviarse.

(c) Verifique que (B, B) **no** es un equilibrio de Nash mostrando cuál empresa tiene incentivos a desviarse y cuál sería su ganancia.

3.4.2. Respuesta

Un equilibrio de Nash es una combinación (s_α^*, s_β^*) tal que ninguna empresa mejora cambiando unilateralmente su estrategia:

$$\pi_\alpha(s_\alpha^*, s_\beta^*) \geq \pi_\alpha(s_\alpha, s_\beta^*)$$

y

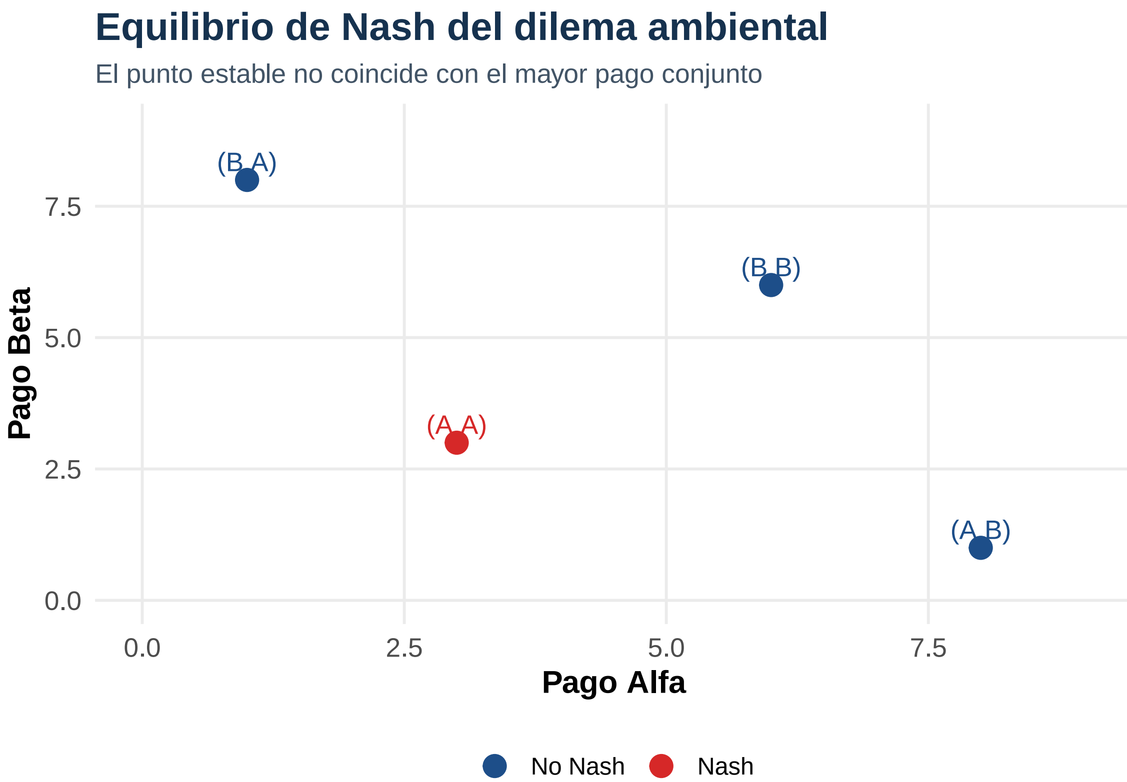
$$\pi_\beta(s_\alpha^*, s_\beta^*) \geq \pi_\beta(s_\alpha^*, s_\beta)$$

para toda estrategia alternativa s_α o s_β.

(A, A) es equilibrio de Nash porque:

- si Beta juega A, Alfa obtiene 3 jugando A y sólo 1 desviándose a B;
- si Alfa juega A, Beta obtiene 3 jugando A y sólo 1 desviándose a B.

(B, B) no es equilibrio porque cualquiera puede desviarse unilateralmente a A y subir su pago de 6 a 8. Por eso, aunque (B, B) es socialmente mejor, no es estable sin algún mecanismo adicional.



3.5. 4. Óptimo social y brecha de eficiencia

3.5.1. Enunciado

(Óptimo social y brecha de eficiencia.)

(a) El óptimo social maximiza la suma de pagos. Identifíquelo. ¿Coincide con el equilibrio de Nash?

(b) Calcule la **pérdida social** de estar en el equilibrio de Nash respecto al óptimo social: $\Delta W = W^* - W^{NE}$.

(c) Represente gráficamente los pagos individuales en los cuatro resultados posibles como puntos en el plano (pago Alfa, pago Beta). Dibuje la **frontera de Pareto** de esta economía. ¿El equilibrio de Nash está sobre esa frontera?

3.5.2. Respuesta

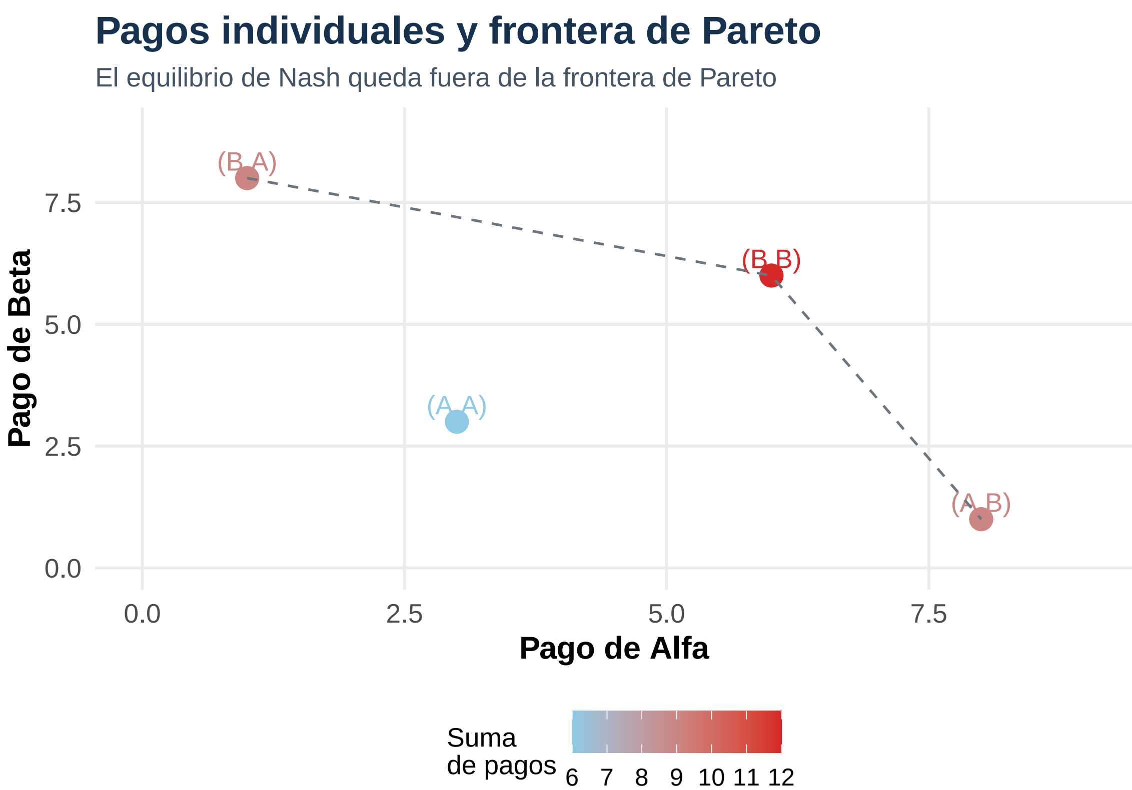
El óptimo social maximiza la suma de pagos. Como la suma máxima es 12, el óptimo social es:

$$(B, B).$$

El equilibrio de Nash es (A, A), con suma total 6. Por tanto, la pérdida social es:

$$\Delta W = W^* - W^{NE} = 12 - 6 = 6.$$

La frontera de Pareto está compuesta por los puntos que no son dominados por otro resultado. Aquí $(A, A) = (3, 3)$ es dominado por $(B, B) = (6, 6)$, porque ambas empresas estarían mejor en (B, B). Los otros tres puntos representan intercambios distributivos: uno favorece a Alfa, otro a Beta y otro entrega cooperación mutua.



3.6. 5. Política pública como mecanismo de escape

3.6.1. Enunciado

(Política pública como mecanismo de escape.)

(a) El gobierno propone un impuesto $ au$ a cada empresa que produzca contaminación alta (A), de modo que el pago neto de elegir A se reduce en $ au$. ¿Cuál es el valor mínimo de $ au$ que hace que (B, B) sea un equilibrio de Nash?

(b) Interprete: ¿cómo cambia el impuesto la estructura de incentivos de cada empresa? ¿Es esto análogo al impuesto pigouviano?

(c) ¿Existe alguna alternativa al impuesto que logre el mismo resultado? Piense en acuerdos vinculantes, regulación directa o normas sociales.

3.6.2. Respuesta

Si producir contaminación alta paga un impuesto τ, los pagos asociados a elegir A bajan en τ.

Para que B sea mejor respuesta cuando la otra empresa juega B:

$$6 \geq 8 - \tau \quad \Rightarrow \quad \tau \geq 2.$$

Para que B sea mejor respuesta cuando la otra empresa juega A:

$$1 \geq 3 - \tau \quad \Rightarrow \quad \tau \geq 2.$$

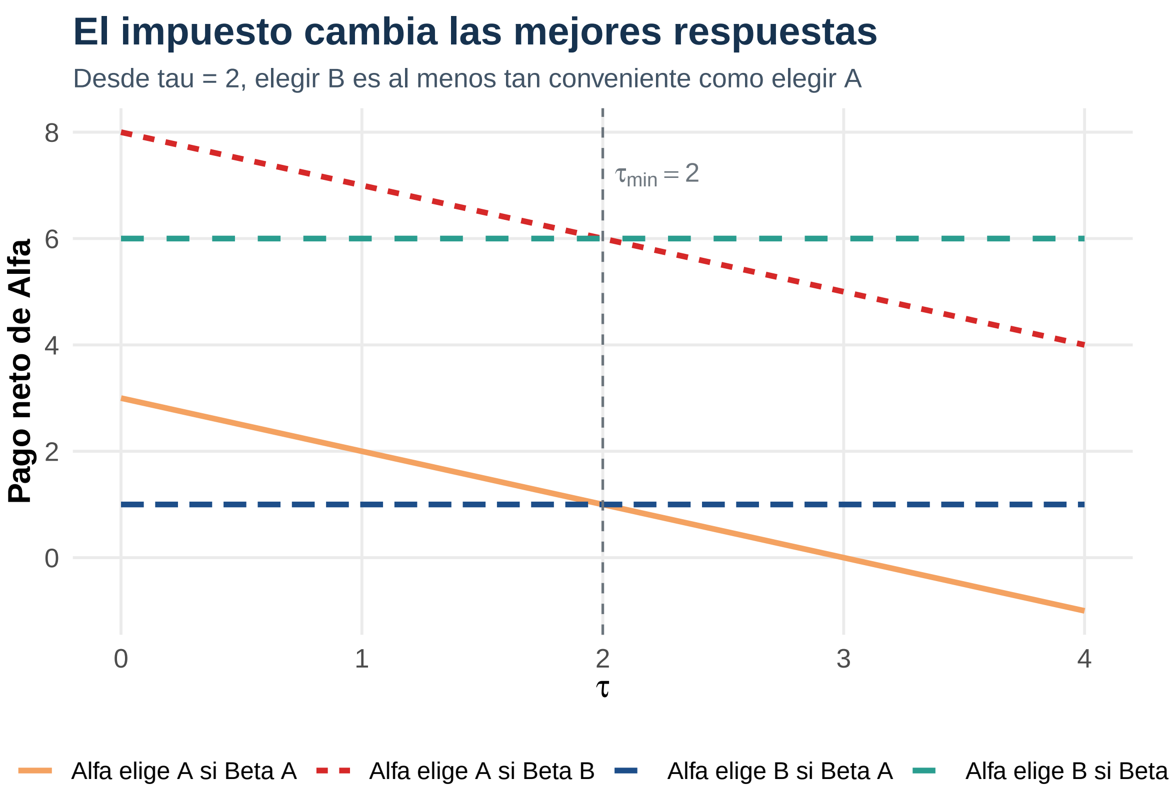
Por tanto, el impuesto mínimo es:

$\tau_{\text{mín}} = 2.$

Con $\tau = 2$, contaminar alto deja de ser atractivo en el margen. El impuesto hace que la empresa internalice el costo social que antes no consideraba. Esta es la lógica de un **impuesto pigouviano**: corregir una externalidad negativa modificando precios relativos.

Alternativas posibles son:

- regulación directa que obligue a instalar filtros;
- acuerdos vinculantes entre empresas;
- permisos de emisión con límite total;
- normas sociales o presión reputacional si la contaminación es observable.



3.7. 6. Introducción de preferencias sociales

3.7.1. Enunciado

(Introducción de preferencias sociales.) Suponga ahora que cada empresa tiene un grado de altruismo $\alpha \in [0, 1]$: el pago efectivo de la empresa i es

$$\tilde{\pi}_i = \pi_i + \alpha \pi_j,$$

donde π_j es el pago de la otra empresa.

(a) Reescriba la matriz de pagos efectivos en función de α.

(b) ¿Para qué valor de α deja de existir la estrategia dominante A para Alfa? (Es decir, para qué α Alfa prefiere B independientemente de lo que haga Beta.)

(c) Interprete: ¿qué nos dice esto sobre el rol del altruismo o la responsabilidad social empresarial en la resolución de dilemas sociales?

3.7.2. Respuesta

El pago efectivo de Alfa en cada celda es:

$$\tilde{\pi}_\alpha = \pi_\alpha + \alpha\pi_\beta.$$

La matriz de pagos efectivos queda:

Tabla 14: Matriz de pagos efectivos con altruismo

Alfa	Beta	Pago efectivo Alfa	Pago efectivo Beta
B	B	6 + 6	6 + 6
B	A	1 + 8	8 +
A	B	8 +	1 + 8
A	A	3 + 3	3 + 3

Para que Alfa prefiera B cuando Beta juega B:

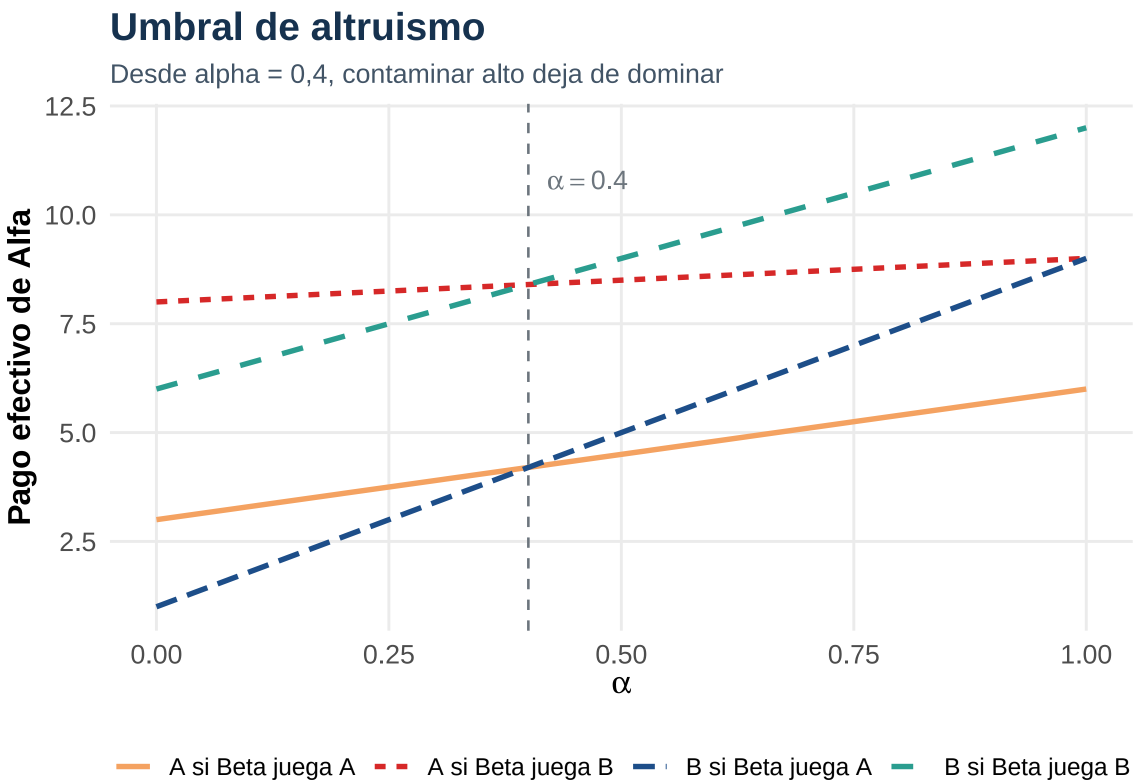
$$6 + 6\alpha \geq 8 + \alpha \quad \Rightarrow \quad 5\alpha \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha \geq 0{,}4.$$

Para que Alfa prefiera B cuando Beta juega A:

$$1 + 8\alpha \geq 3 + 3\alpha \quad \Rightarrow \quad 5\alpha \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha \geq 0{,}4.$$

Entonces, cuando $\alpha \geq 0{,}4$, A deja de ser una estrategia dominante para Alfa. Si $\alpha > 0{,}4$, B pasa a dominar estrictamente a A.

La interpretación es que la responsabilidad social o el altruismo pueden resolver el dilema si son suficientemente fuertes: si a cada empresa le importa bastante el daño que causa a la otra, contaminar deja de ser privadamente atractivo.



4. Parte III. Matemático II: Curvas de mejor respuesta y equilibrio de Nash continuo

4.1. Contexto

Volvemos al edificio Magnolia, con dos residentes: Ana y Bruno. Ambos deben elegir cuánto contribuir al mantenimiento del jardín común. Ana elige $a \geq 0$ horas de trabajo; Bruno elige $b \geq 0$ horas. El beneficio del jardín depende del esfuerzo **total**: $a + b$. El beneficio personal de cada residente es:

$$\pi_A(a, b) = 4(a + b) - a^2, \qquad \pi_B(a, b) = 4(a + b) - b^2.$$

El término $4(a + b)$ refleja que el jardín es un bien público local (ambos disfrutan del esfuerzo total) y a^2 (resp. b^2) es el costo personal del esfuerzo.

4.2. 1. Geometría del problema

4.2.1. Enunciado

(Geometría del problema.)

(a) Fije $b = 2$. Grafique $\pi_A(a, 2)$ como función de $a \geq 0$. ¿Es cóncava o convexa? ¿Tiene máximo interior?

(b) ¿El pago de Ana aumenta con el esfuerzo de Bruno, incluso cuando Ana no cambia el suyo? ¿Qué nos dice esto sobre la naturaleza del bien público?

4.2.2. Respuesta

Si $b = 2$:

$$\pi_A(a, 2) = 4(a + 2) - a^2 = 4a + 8 - a^2.$$

Esta función es cóncava porque el coeficiente de a^2 es negativo. Su derivada es:

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial a} = 4 - 2a.$$

Igualando a cero:

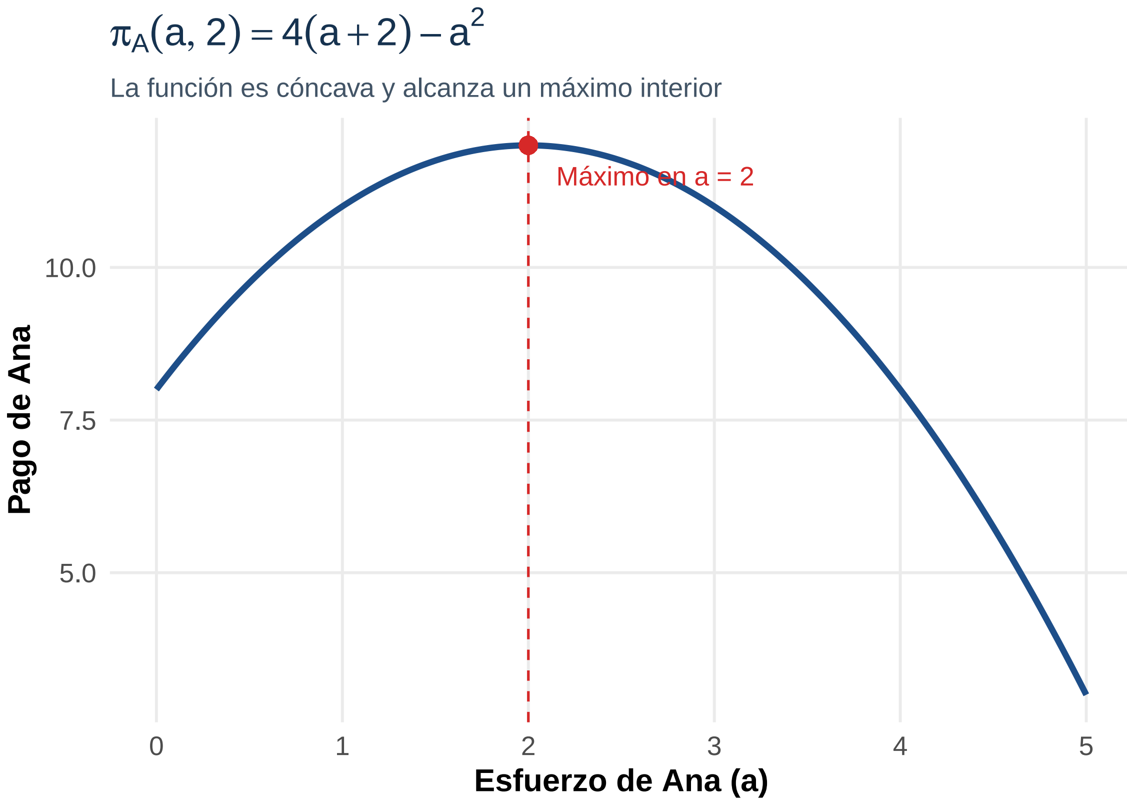
$$4 - 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

Por tanto, tiene un máximo interior en $a = 2$.

Además:

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial b} = 4 > 0.$$

Eso significa que el pago de Ana aumenta cuando Bruno trabaja más, incluso si Ana no cambia su esfuerzo. Esa es la característica de un bien público local: el esfuerzo de uno genera beneficio para ambos.



4.3. 2. Mejor respuesta individual

4.3.1. Enunciado

(Mejor respuesta individual.)

(a) Para un b dado, Ana maximiza π_A respecto a a. Derive la condición de primer orden $\partial \pi_A / \partial a = 0$ y despeje la **mejor respuesta** de Ana:

$$a^*(b) = \ .$$

(b) Note que la mejor respuesta de Ana **no** depende de b. Explique intuitivamente por qué: ¿es el esfuerzo de Bruno un complemento o sustituto del de Ana desde el punto de vista del incentivo marginal de Ana?

(c) Por simetría, escriba $b^*(a)$ para Bruno.

4.3.2. Respuesta

Ana resuelve:

$$\max_{a \geq 0} \; 4(a+b) - a^2.$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial a} = 4 - 2a = 0.$$

Entonces:

$$a^*(b) = 2.$$

La mejor respuesta de Ana no depende de b porque el esfuerzo de Bruno aumenta el **nivel** del beneficio de Ana, pero no cambia el beneficio marginal de una hora adicional de Ana. Formalmente, la derivada cruzada es cero:

$$\frac{\partial^2 \pi_A}{\partial a \partial b} = 0.$$

Así, el esfuerzo de Bruno no es complemento ni sustituto del esfuerzo de Ana en el margen privado. Por simetría:

$$b^*(a) = 2.$$

Tabla 15: Mejores respuestas individuales

jugador	problema	mejor respuesta
Ana	max_a 4(a+b)-a^2	a*(b)=2
Bruno	max_b 4(a+b)-b^2	b*(a)=2

4.4. 3. Equilibrio de Nash

4.4.1. Enunciado

(Equilibrio de Nash.)

(a) El equilibrio de Nash (a^{NE}, b^{NE}) satisface $a = a^*(b)$ y $b = b^*(a)$ simultáneamente. Resuélvalo.

(b) Grafique las dos curvas de mejor respuesta en el plano (a, b). ¿Dónde se intersectan? Indique el equilibrio de Nash.

(c) Calcule π_A^{NE} y π_B^{NE} en el equilibrio.

4.4.2. Respuesta

El equilibrio de Nash satisface simultáneamente:

$$a = a^*(b) = 2, \qquad b = b^*(a) = 2.$$

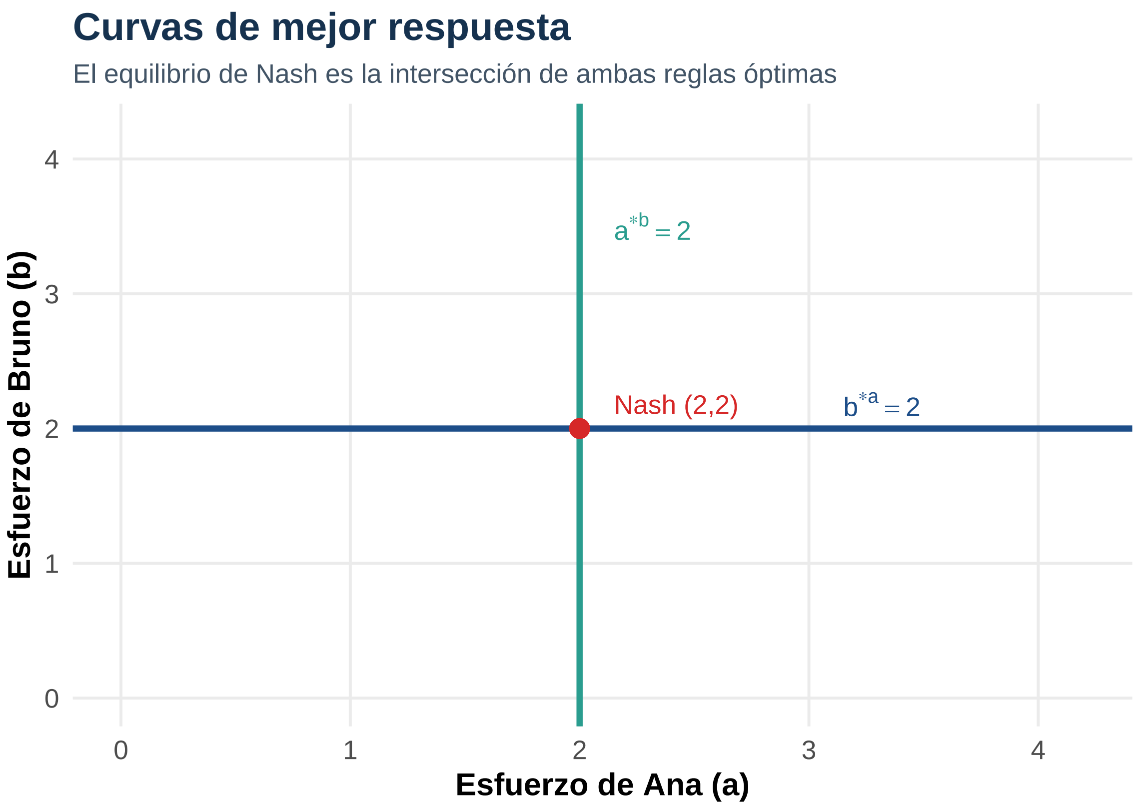
Por tanto:

$$(a^{NE}, b^{NE}) = (2, 2).$$

Los pagos son:

$$\pi_A^{NE} = 4(2+2) - 2^2 = 16 - 4 = 12,$$

$$\pi_B^{NE} = 4(2+2) - 2^2 = 12.$$



4.5. 4. Óptimo social

4.5.1. Enunciado

(Óptimo social.) El planificador social elige (a, b) para maximizar el bienestar total

$$W(a, b) = \pi_A + \pi_B = 8(a + b) - a^2 - b^2.$$

(a) Derive las condiciones de primer orden $\partial W/\partial a = 0$ y $\partial W/\partial b = 0$. Obtenga el óptimo social (a^*, b^*).

(b) Calcule $W^* = W(a^*, b^*)$ y compárelo con $W^{NE} = W(a^{NE}, b^{NE})$. ¿Hay una brecha? ¿En qué dirección?

(c) En el plano (a,b), dibuje las curvas de nivel de W (elipses o círculos centrados en el óptimo social). ¿El equilibrio de Nash está "demasiado cerca" o "demasiado lejos" del origen respecto al óptimo? Interprete: ¿hay suprrovisión o subprovisión del bien público en el equilibrio de Nash?

4.5.2. Respuesta

El planificador maximiza:

$$W(a,b) = 8(a+b) - a^2 - b^2.$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = 8 - 2a = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial b} = 8 - 2b = 0.$$

Por tanto:

$$(a^*, b^*) = (4,4).$$

El bienestar en Nash es:

$$W^{NE} = 8(2+2) - 2^2 - 2^2 = 24.$$

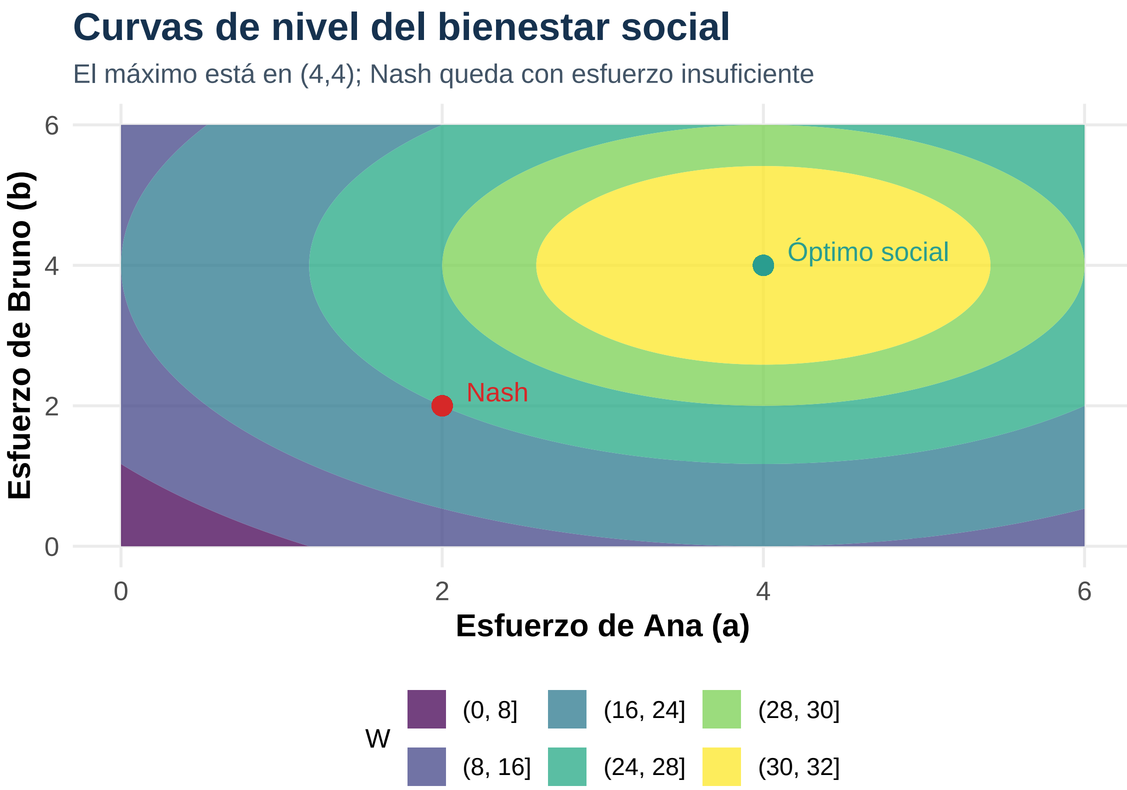
El bienestar social óptimo es:

$$W^* = 8(4+4) - 4^2 - 4^2 = 32.$$

Hay una brecha positiva:

$$W^* - W^{NE} = 8.$$

El equilibrio de Nash queda demasiado cerca del origen respecto del óptimo: hay **subprovisión** del bien público. Cada persona aporta menos esfuerzo del socialmente deseable porque no internaliza completamente el beneficio que su esfuerzo genera sobre el otro.



4.6. 5. Interpretación geométrica central

4.6.1. Enunciado

(Interpretación geométrica central.)

(a) El óptimo social exige que cada individuo internalice el beneficio que su esfuerzo genera en el otro. Muestre algébricamente que la diferencia entre la condición de óptimo y la de mejor respuesta individual es exactamente el beneficio marginal externo.

(b) Un **subsidio** s por hora trabajada modifica el pago de Ana a $\tilde{\pi}_A = 4(a+b) - a^2 + sa$. ¿Cuál es el subsidio s^* que hace que la mejor respuesta individual coincida con el óptimo social? ¿Es esto análogo al subsidio pigouviano para externalidades positivas?

(c) Grafique las nuevas curvas de mejor respuesta con el subsidio s^* y verifique que su intersección es el óptimo social.

4.6.2. Respuesta

La condición privada de Ana es:

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial a} = 4 - 2a = 0.$$

La condición social respecto de a es:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = 8 - 2a = 0.$$

La diferencia es:

$$(8 - 2a) - (4 - 2a) = 4.$$

Ese 4 es exactamente el beneficio marginal externo que el esfuerzo de Ana genera sobre Bruno:

$$\frac{\partial \pi_B}{\partial a} = 4.$$

Si Ana recibe un subsidio s por hora, su pago pasa a ser:

$$\tilde{\pi}_A = 4(a + b) - a^2 + sa.$$

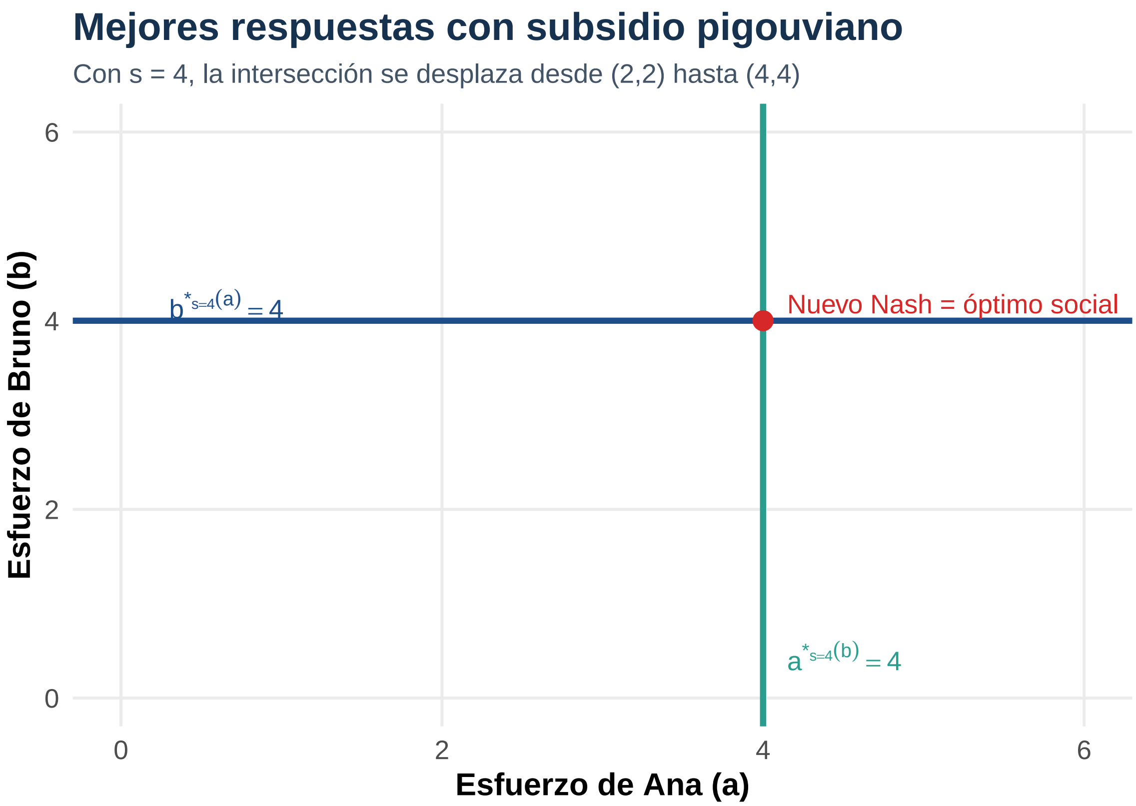
La nueva condición de primer orden es:

$$4 + s - 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a^*(b) = \frac{4 + s}{2}.$$

Para que $a^*(b) = 4$:

$$\frac{4 + s}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad s^* = 4.$$

El subsidio óptimo es igual al beneficio marginal externo. Es análogo a un subsidio pigouviano para externalidades positivas: premia una acción privada que genera beneficios sociales no remunerados.



5. Parte IV. Matemático III: Tragedia de los comunes

5.1. Contexto

El lago Sereno es un recurso de acceso libre explotado por $n = 10$ familias de pescadores. Cada familia i elige cuántas horas pescar: $h_i \geq 0$. El esfuerzo total es $H = \sum_{i=1}^{10} h_i$. La captura **total** del lago depende del esfuerzo total de acuerdo a:

$$F(H) = 20H - H^2, \qquad H \in [0, 20].$$

Dado que el lago es de acceso libre, la captura se distribuye proporcionalmente al esfuerzo individual:

$$f_i = \frac{h_i}{H} \cdot F(H) = h_i(20 - H).$$

El beneficio neto de la familia i es

$$\pi_i(h_i, H_{-i}) = h_i(20 - H) - ch_i,$$

donde $c = 2$ es el costo (por hora pescada, e.g. combustible, tiempo). Todas las familias son idénticas.

5.2. 1. Geometría de la captura total

5.2.1. Enunciado

(Geometría de la captura total.)

(a) Grafique $F(H) = 20H - H^2$ para $H \in [0, 20]$. ¿Cuál es el esfuerzo $H_{\text{máx}}$ que maximiza la captura total? ¿Qué ocurre con F para $H > H_{\text{máx}}$?

(b) ¿Qué valor de H hace $F(H) = 0$? Interprete biológicamente: ¿qué representa ese punto?

(c) Grafique la captura promedio por hora $F(H)/H = 20 - H$ y la captura marginal social $F'(H) = 20 - 2H$. ¿En qué punto se igualan? ¿Por qué la captura marginal está siempre por debajo de la promedio cuando $H > 0$?

5.2.2. Respuesta

La captura total es una parábola cóncava:

$$F(H) = 20H - H^2.$$

Su derivada es:

$$F'(H) = 20 - 2H.$$

El máximo biológico de captura se obtiene cuando:

$$20 - 2H = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{\text{máx}} = 10.$$

En $H = 10$, la captura total es $F(10) = 100$. Si $H > 10$, el esfuerzo adicional empieza a reducir la captura total: hay sobreexplotación biológica. En $H = 20$, la captura llega a cero:

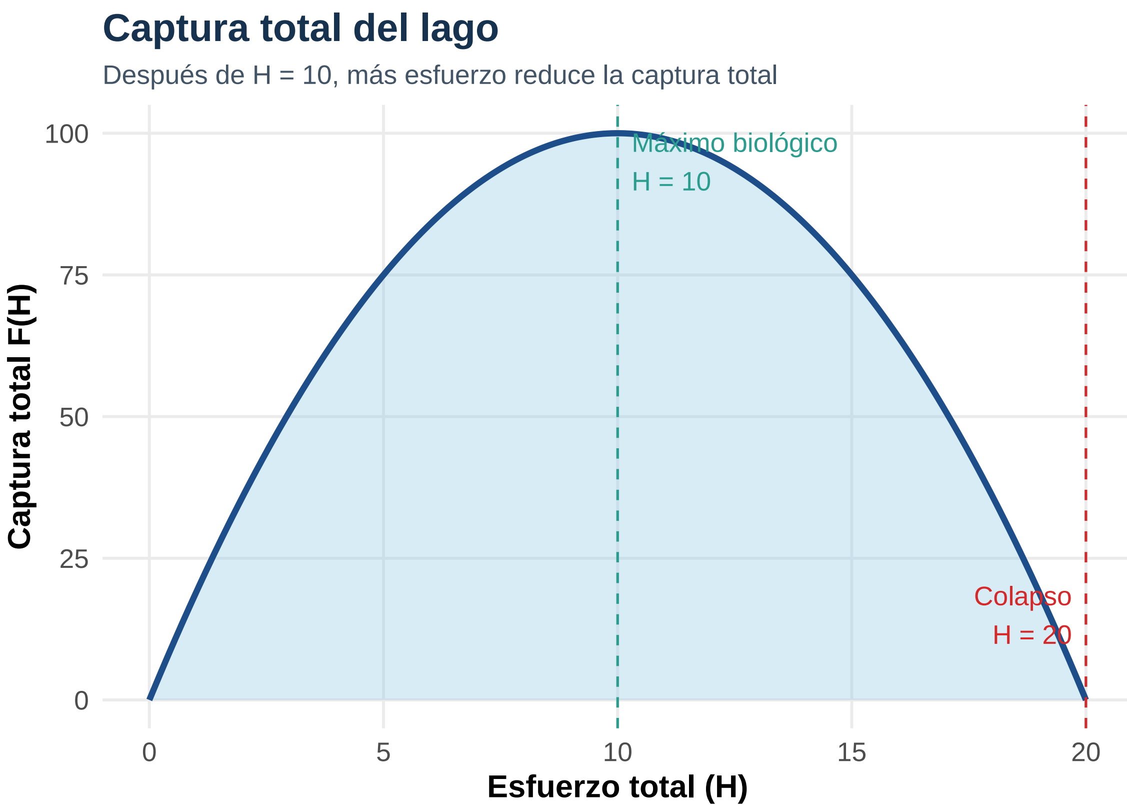
$$F(20) = 20(20) - 20^2 = 0.$$

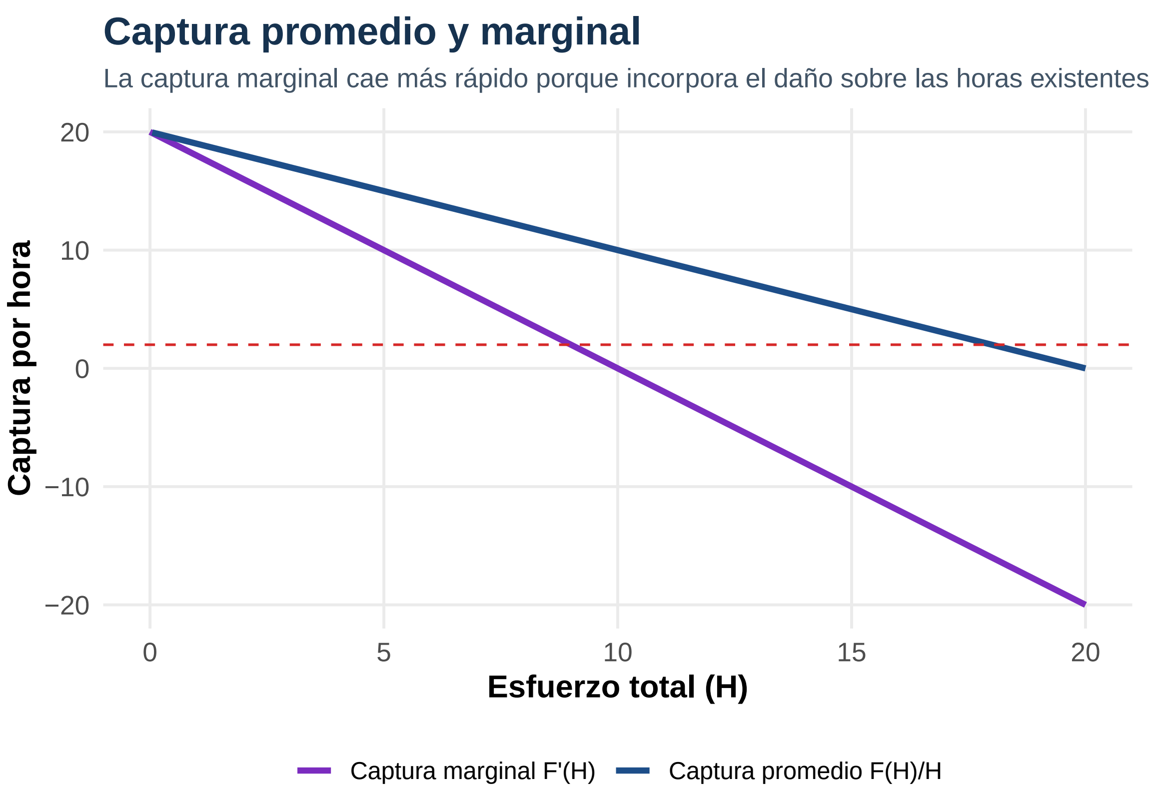
Ese punto representa colapso del recurso en el modelo: se pesca tanto que la productividad neta del lago desaparece.

La captura promedio y marginal son:

$$\frac{F(H)}{H} = 20 - H, \qquad F'(H) = 20 - 2H.$$

Se igualan sólo en $H = 0$. Para $H > 0$, la captura marginal está por debajo de la promedio porque una hora adicional no sólo aporta esfuerzo, sino que reduce la productividad de todas las horas ya existentes.





5.3. 2. Mejor respuesta individual y equilibrio de Nash

5.3.1. Enunciado

(Mejor respuesta individual y equilibrio de Nash.) Suponga que las otras 9 familias pescan H_{-i} horas en total, de modo que $H = h_i + H_{-i}$.

(a) Reescriba π_i en función de h_i y H_{-i}. Derive la condición de primer orden $\partial\pi_i/\partial h_i = 0$ y despeje la mejor respuesta:

$$h_i^*(H_{-i}) = \ .$$

(b) En el equilibrio de Nash simétrico, $h_i = h^{NE}$ para todo i, de modo que $H_{-i} = 9h^{NE}$ y $H = 10h^{NE}$. Sustituyendo, encuentre h^{NE} y H^{NE}.

(c) Calcule π_i^{NE} y la captura total $F(H^{NE})$.

5.3.2. Respuesta

Como $H = h_i + H_{-i}$:

$$\pi_i = h_i(20 - h_i - H_{-i}) - 2h_i.$$

Simplificando:

$$\pi_i = h_i(18 - H_{-i} - h_i).$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial h_i} = 18 - H_{-i} - 2h_i = 0.$$

Por tanto, la mejor respuesta es:

$$h_i^*(H_{-i}) = \frac{18 - H_{-i}}{2}.$$

En un equilibrio simétrico, todas las familias eligen h^{NE}, así que:

$$H_{-i} = 9h^{NE}.$$

Sustituyendo:

$$h^{NE} = \frac{18 - 9h^{NE}}{2}.$$

Entonces:

$$2h^{NE} = 18 - 9h^{NE} \quad \Rightarrow \quad 11h^{NE} = 18 \quad \Rightarrow \quad h^{NE} = \frac{18}{11} \approx 1,64.$$

El esfuerzo total es:

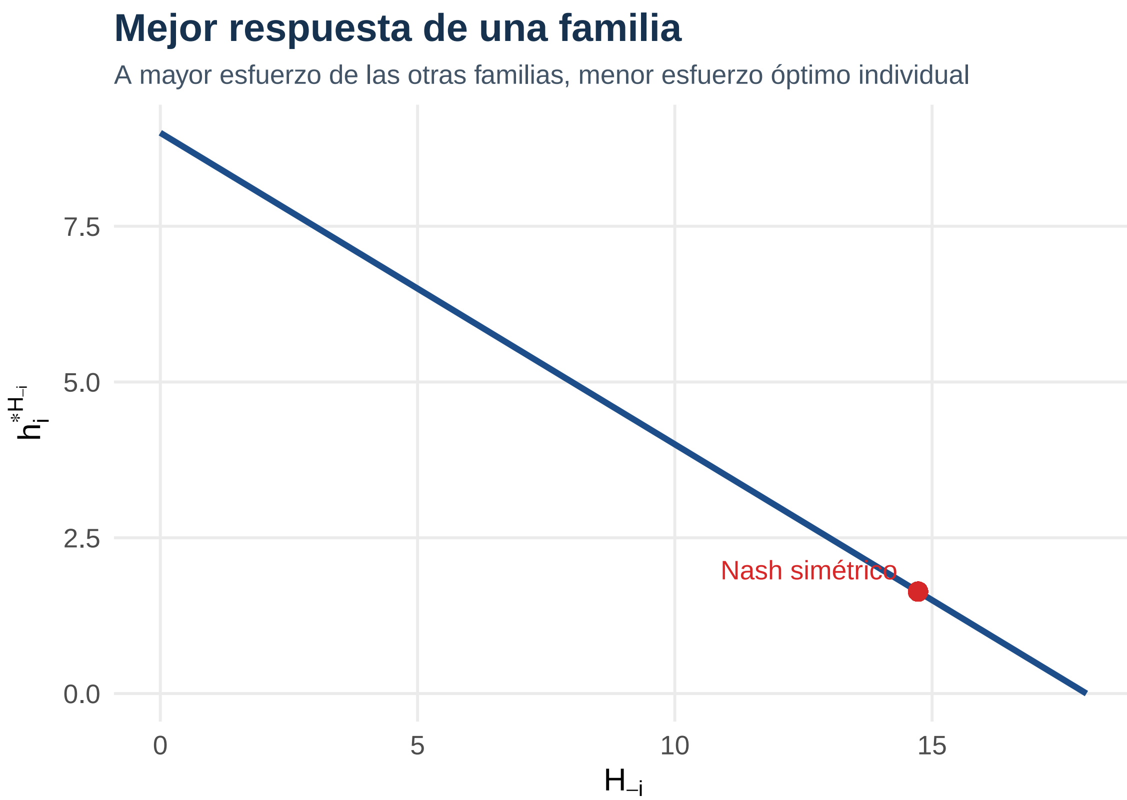
$$H^{NE} = 10h^{NE} = \frac{180}{11} \approx 16,36.$$

La captura total en Nash es:

$$F(H^{NE}) \approx 59,50.$$

Y cada familia obtiene:

$$\pi_i^{NE} = h^{NE}(18 - H^{NE}) \approx 2,68.$$



5.4. 3. Óptimo social del planificador

5.4.1. Enunciado

(Óptimo social del planificador.) Un planificador que controla el esfuerzo total maximiza el bienestar agregado:

$$W(H) = F(H) - cH = 20H - H^2 - 2H.$$

(a) Encuentre H^* y el esfuerzo por familia $h^* = H^*/10$.

(b) Calcule W^* y compárelo con $W^{NE} = 10\pi_i^{NE}$. ¿Cuál es la pérdida social neta de la tragedia de los comunes?

(c) Muestre en un gráfico de $(H, \$)$ las curvas $F(H)/H$ (beneficio promedio), $F'(H)$ (beneficio marginal social) y la línea horizontal $c = 2$. Indique H^* (donde $F'(H) = c$) y H^{NE} (donde $F(H)/H = c$). ¿Por qué el equilibrio de libre acceso iguala el beneficio **promedio** con el costo y no el **marginal**?

5.4.2. Respuesta

El planificador maximiza:

$$W(H) = 20H - H^2 - 2H = 18H - H^2.$$

La condición de primer orden es:

$$18 - 2H = 0 \quad \Rightarrow \quad H^* = 9.$$

Por familia:

$$h^* = \frac{9}{10} = 0{,}9.$$

El bienestar óptimo es:

$$W^* = 18(9) - 9^2 = 81.$$

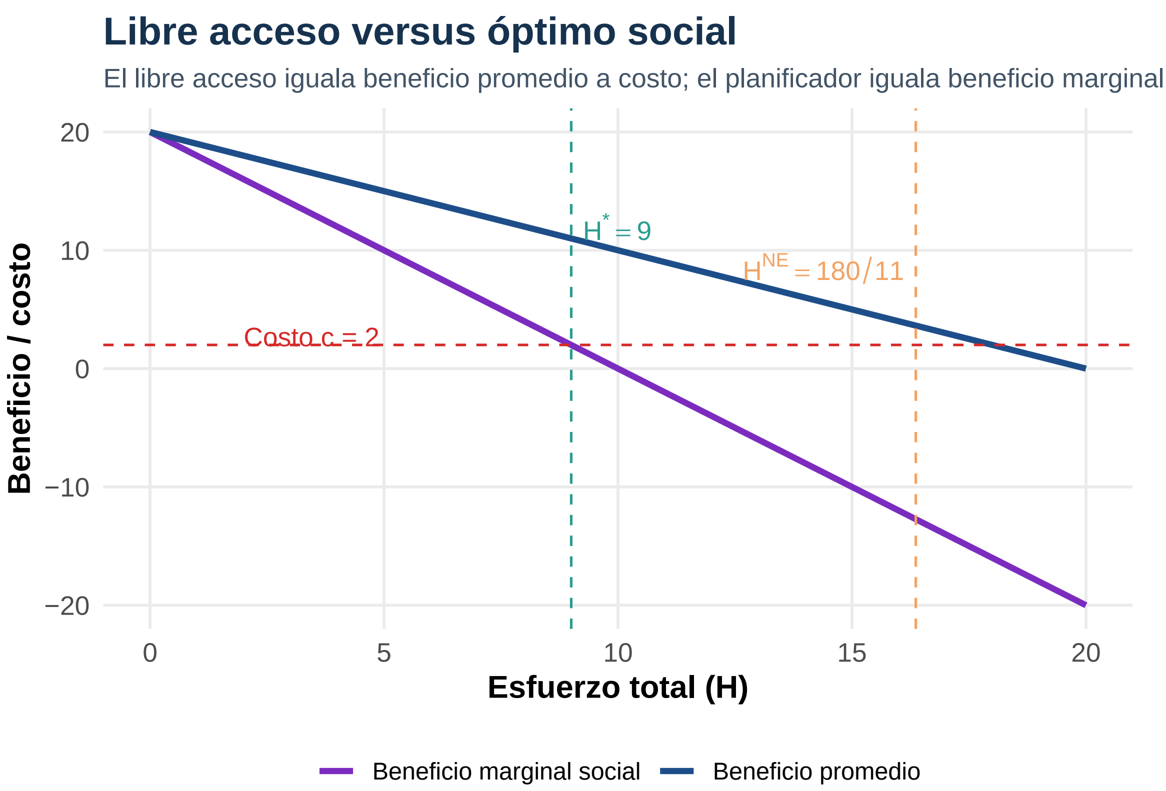
En Nash:

$$W^{NE} = 10\pi_i^{NE} \approx 26,78.$$

La pérdida social neta de la tragedia de los comunes es:

$$W^* - W^{NE} \approx 54,22.$$

El equilibrio de libre acceso tiene demasiado esfuerzo: $H^{NE} \approx 16,36$, mientras que el óptimo social usa $H^* = 9$.



5.5. 4. La externalidad en el margen

5.5.1. Enunciado

(La externalidad en el margen.)

(a) Cuando la familia i aumenta h_i en una unidad, ¿en cuánto cae la captura de cada otra familia? Calcule este efecto externo marginal.

(b) Muestre que la diferencia entre el beneficio marginal social de pescar y el privado es exactamente igual a la externalidad negativa acumulada sobre todas las demás familias.

(c) Proponga un impuesto pigouviano $ au^$ *por hora pescada que internalice la externalidad y lleve al equilibrio de Nash al óptimo social. Calcule $ au^*$ explícitamente.

5.5.2. Respuesta

La ganancia neta de otra familia j es:

$$\pi_j = h_j(20 - H) - 2h_j.$$

Si la familia i aumenta h_i, entonces aumenta H y reduce la captura de j. El efecto marginal sobre j es:

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial h_i} = -h_j.$$

Es decir, cada otra familia pierde h_j unidades de captura neta. La externalidad total sobre las otras nueve familias es:

$$-\sum_{j \neq i} h_j = -H_{-i}.$$

La condición privada de la familia i es:

$$18 - H_{-i} - 2h_i = 0.$$

La condición social respecto de h_i es:

$$18 - 2H = 18 - 2h_i - 2H_{-i} = 0.$$

La diferencia entre el beneficio marginal privado y el social es:

$$H_{-i}.$$

Eso es exactamente el daño marginal acumulado sobre los demás.

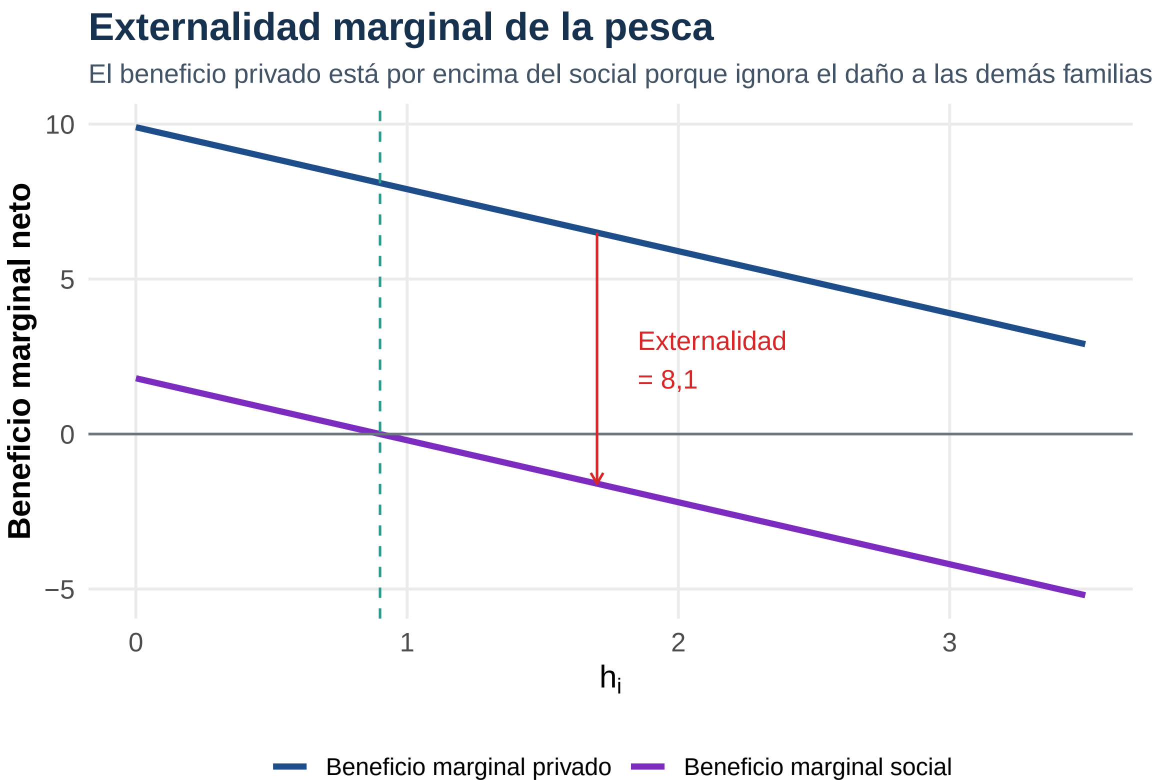
En el óptimo simétrico, cada familia pesca $h^* = 0{,}9$, de modo que:

$$H_{-i} = 9h^* = 8{,}1.$$

El impuesto pigouviano por hora debe ser:

$\tau^* = 8{,}1.$

Con ese impuesto, la familia internaliza el daño que su hora adicional de pesca causa a las otras nueve familias.



5.6. 5. Soluciones institucionales alternativas

5.6.1. Enunciado

(Soluciones institucionales alternativas.)

(a) **Cuota individual:** el gobierno asigna a cada familia una cuota máxima de h^* horas. ¿Logra el óptimo social? ¿Qué información necesita el gobierno para implementar esto?

(b) **Privatización:** el lago se vende a un único dueño que contrata a las 10 familias pagando w por hora y decide H para maximizar $F(H) - wH$. ¿Elige el dueño H^*? ¿A qué salario?

(c) **Autogestión comunitaria:** las familias acuerdan voluntariamente pescar h^* cada una. Modele este acuerdo como un juego repetido: ¿bajo qué condición (en términos de la tasa de descuento δ) la estrategia de castigo (reducir la pesca al máximo si alguien se desvía) sostiene el acuerdo en equilibrio?

Hint: la condición requiere que el beneficio de respetar el acuerdo en todos los períodos futuros supere la ganancia inmediata de desviarse una vez.

5.6.2. Respuesta

5.6.3. a) Cuota individual

Si el gobierno fija una cuota máxima

$$h_i \leq h^* = 0{,}9,$$

entonces el esfuerzo total será $H^* = 9$ si las 10 familias cumplen. Sí implementa el óptimo social, pero requiere información sobre la función de captura, el costo por hora, el número de familias y capacidad de monitoreo.

5.6.4. b) Privatización

Si un único dueño controla el lago y contrata trabajo a salario w, elige H para maximizar:

$$F(H) - wH = 20H - H^2 - wH.$$

La condición de primer orden es:

$$20 - 2H - w = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{20 - w}{2}.$$

Si el salario refleja el costo social de oportunidad $w = c = 2$, entonces:

$$H = \frac{20 - 2}{2} = 9 = H^*.$$

Por tanto, la privatización puede implementar el óptimo si el dueño internaliza el efecto total del esfuerzo sobre la captura agregada y paga un costo por hora igual al costo social relevante.

5.6.5. c) Autogestión comunitaria

Las familias también podrían acordar pescar $h^* = 0{,}9$ cada una. Para que el acuerdo sea sostenible, el juego debe repetirse y el castigo por desviarse debe ser creíble.

Si todas cumplen, cada familia obtiene por período:

$$\pi^C = 8{,}1.$$

Si una familia se desvía una vez mientras las demás pescan 0,9, enfrenta $H_{-i} = 8{,}1$ y elige su mejor respuesta:

$$h_i^D = \frac{18 - 8{,}1}{2} = 4{,}95.$$

Su pago de desviación es:

$$\pi^D = (4{,}95)^2 \approx 24{,}50.$$

Si el castigo es volver para siempre al equilibrio de libre acceso, el pago futuro de castigo es:

$$\pi^N \approx 2,68.$$

La cooperación se sostiene si:

$$\frac{\pi^C}{1-\delta} \geq \pi^D + \frac{\delta \pi^N}{1-\delta}.$$

Equivalente a:

$$\delta \geq \frac{\pi^D - \pi^C}{\pi^D - \pi^N} \approx 0,75.$$

La autogestión funciona si las familias son suficientemente pacientes, pueden observar desviaciones y aplicar castigos creíbles.

Tabla 16: Soluciones institucionales a la tragedia de los comunes

mecanismo	implementa_optimo	requisito
Cuota individual	Sí, si se fija h_i = 0,9	Información, fiscalización y sanciones
Privatización	Sí, si w = c = 2	Derechos de propiedad claros e internalización total

mecanismo	implementa_optimo	requisito
Autogestión comunitaria	Sí, si es suficientemente alto	Repetición, monitoreo, confianza y castigo creíble

5.7. 6. Síntesis geométrica

5.7.1. Enunciado

(Síntesis geométrica.)

(a) Complete la siguiente tabla con los valores calculados:

Variable	Óptimo Social	Equil. Nash (libre acceso)
Esfuerzo total H		
Esfuerzo por familia h_i		
Captura total $F(H)$		
Bienestar total W		
Pago por familia π_i		

(b) Explique con dos oraciones por qué el libre acceso lleva a un esfuerzo **mayor** que el óptimo y a un bienestar **menor**. ¿Cómo captura este resultado la **tragedia de los comunes**?

(c) Reflexione: si las 10 familias son racionales e informadas, ¿por qué no llegan solas al acuerdo óptimo? ¿Qué fricciones o fallas de coordinación lo impiden?

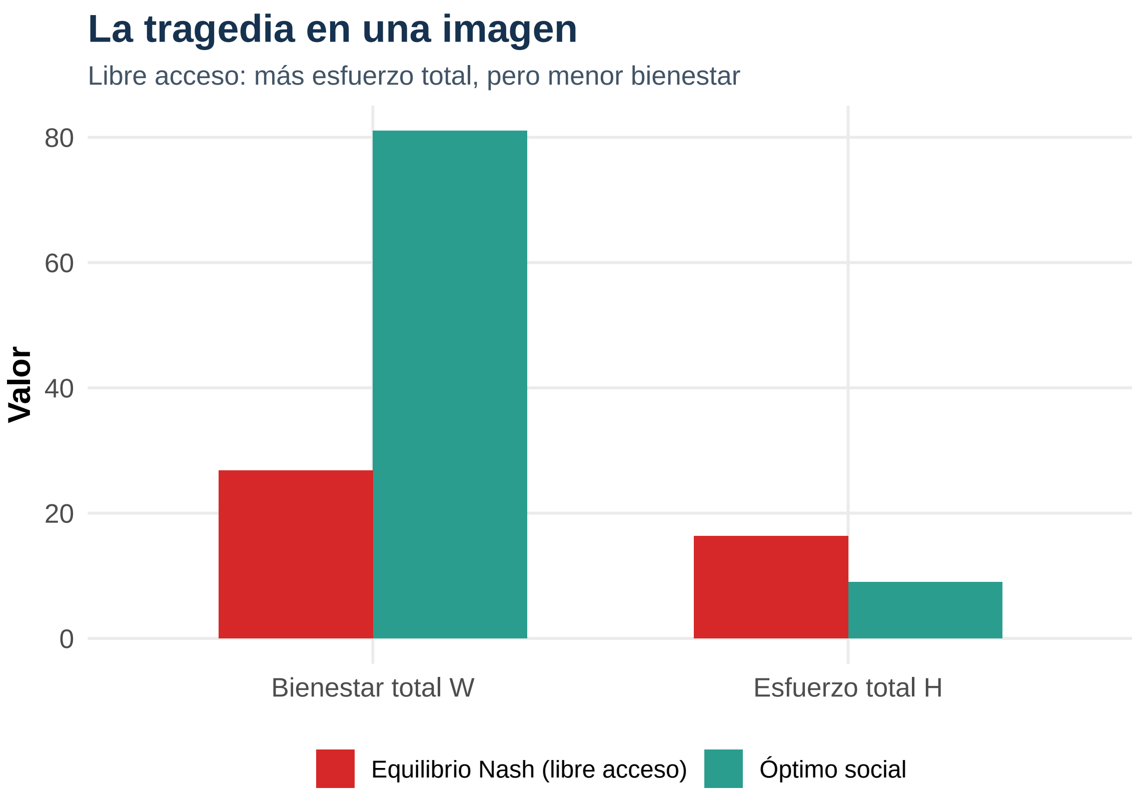
5.7.2. Respuesta

Tabla 17: Comparación entre óptimo social y libre acceso

variable	Óptimo social	Equilibrio Nash (libre acceso)
Esfuerzo total H	9.0	16.364
Esfuerzo por familia h_i	0.9	1.636
Captura total F(H)	99.0	59.504
Bienestar total W	81.0	26.777
Pago por familia _i	8.1	2.678

El libre acceso lleva a un esfuerzo mayor que el óptimo porque cada familia compara su beneficio privado con su costo privado, pero no considera que su esfuerzo reduce la captura de las otras nueve. Como todas hacen lo mismo, el esfuerzo agregado sube demasiado y el bienestar total cae.

Esta es la tragedia de los comunes: agentes racionales e informados pueden terminar en un resultado malo porque el equilibrio individual no internaliza la externalidad. No llegan solos al acuerdo óptimo por problemas de confianza, monitoreo, cumplimiento y tentación de desviarse. Sin reglas, sanciones o reputación suficientemente fuerte, prometer pescar poco no es creíble.



Idea final de la guía: el equilibrio de Nash no significa "lo mejor para todos"; significa "lo estable dadas las decisiones de los demás". Cuando hay externalidades, bienes públicos o recursos comunes, esa estabilidad puede quedar lejos del óptimo social. Por eso importan las instituciones: reglas, impuestos, subsidios, cuotas, reputación y mecanismos de coordinación.