Guía 3

Teoría del consumidor: Cobb-Douglas, efectos ingreso y sustitución, Leontief y sustitutos perfectos

Yerson Olivares Bonilla

2026-04-21

Tabla de contenidos

1. Guía 3

Ramo: Política de las Políticas Públicas / Economía
Estudiante: Yerson Olivares Bonilla
Guía: Guía 3
Fecha: 21-04-2026

Cómo leer esta resolución. En cada ejercicio primero aparece el **enunciado literal**, luego una **explicación intuitiva**, después el **desarrollo formal paso a paso** y finalmente un **apoyo visual**. La idea central de la guía es comparar cómo cambia la respuesta del consumidor cuando sus preferencias son Cobb-Douglas, Leontief o sustitutos perfectos.

2. Parte I. Comentarios conceptuales

2.1. 1. La TMS como precio subjetivo

2.1.1. Enunciado

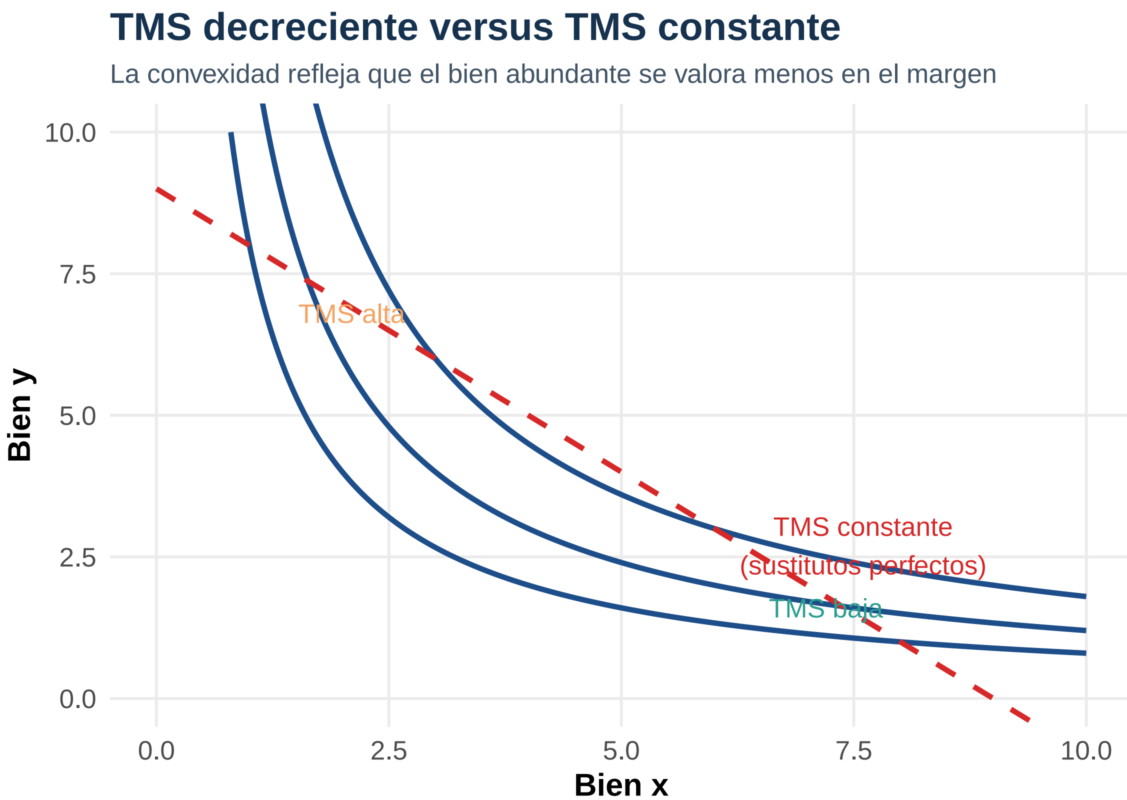
> **(La TMS como precio subjetivo: el lenguaje de las curvas de indiferencia.)** Una curva de indiferencia resume todas las cestas que generan el mismo bienestar. Su pendiente en cualquier punto mide cuánto de un bien está dispuesto a sacrificar el consumidor para obtener una unidad más del otro sin cambiar su utilidad. Explique por qué la TMS disminuye a lo largo de una curva de indiferencia convexa cuando aumenta el consumo del bien en el eje horizontal. ¿Qué interpretación económica tiene esa disminución? ¿Es posible que la TMS sea constante a lo largo de una curva de indiferencia? ¿Qué tipo de preferencias describe ese caso?

2.1.2. Respuesta

La TMS es un **precio subjetivo**: mide cuánto del bien vertical está dispuesto a entregar el consumidor para obtener una unidad adicional del bien horizontal, manteniendo constante su utilidad.

Si las curvas de indiferencia son convexas, la TMS disminuye cuando aumenta el bien del eje horizontal. La razón económica es la **escasez relativa**: cuando el consumidor tiene poco de x, una unidad adicional de x vale mucho y está dispuesto a sacrificar bastante y. Cuando ya tiene mucho x, otra unidad de x vale menos y sacrifica menos y.

Sí puede haber TMS constante. Eso ocurre cuando las curvas de indiferencia son rectas. En ese caso los bienes son **sustitutos perfectos**: el consumidor reemplaza un bien por otro siempre a la misma tasa.



2.2. 2. La función Cobb-Douglas y la proporción constante del gasto

2.2.1. Enunciado

(La función Cobb-Douglas y la proporción constante del gasto.) Para un consumidor con $U(x, y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha}$, las demandas marshallianas son $x^* = \alpha m/p_x$ e $y^* = (1-\alpha)m/p_y$. Comente: ¿qué fracción del ingreso gasta este consumidor en cada bien? ¿Depende esa fracción de los precios o del ingreso? ¿Qué tipo de bienes son x e y para este consumidor (normales, inferiores, de lujo)? ¿Cómo cambia la curva de Engel de x cuando varía α?

2.2.2. Respuesta

El gasto en x es:

$$p_x x^* = p_x \left(\alpha \frac{m}{p_x} \right) = \alpha m.$$

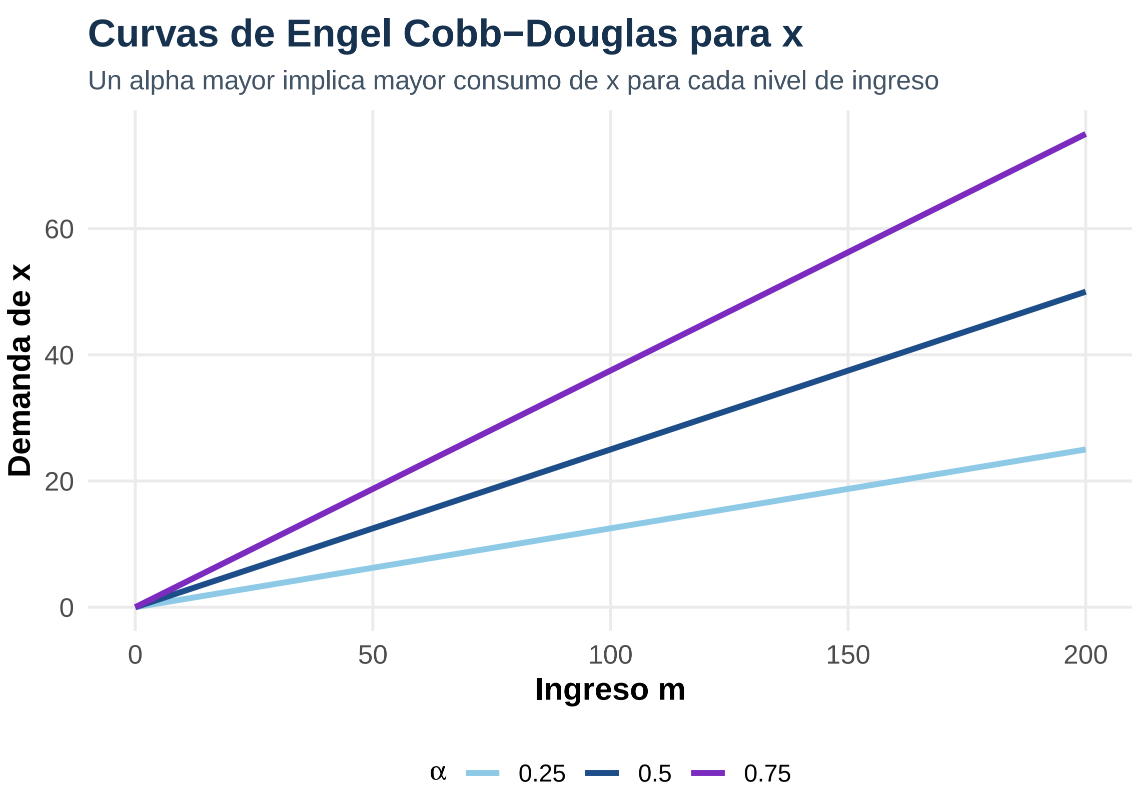
Por tanto, el consumidor gasta la fracción α de su ingreso en x. Análogamente, gasta $1 - \alpha$ en y:

$$p_y y^* = (1 - \alpha) m.$$

Estas fracciones **no dependen** ni de los precios ni del ingreso. Los precios cambian las cantidades físicas, pero no la proporción del presupuesto destinada a cada bien.

Ambos bienes son **normales** porque si sube m, suben x^* e y^*. Además tienen elasticidad ingreso igual a 1: no son bienes de lujo ni necesidades estrictas bajo esta especificación; son bienes con respuesta proporcional al ingreso.

Si α aumenta, la curva de Engel de x se vuelve más empinada en el plano (m, x), porque para cada nivel de ingreso el consumidor destina una fracción mayor a x.



2.3. 3. Efecto total de un cambio de precio

2.3.1. Enunciado

> **(Efecto total de un cambio de precio: la demanda marshalliana.)** Cuando el precio de un bien sube, la demanda marshalliana del consumidor generalmente cae. Explique por qué este efecto total no es, en general, una medida "limpia" del cambio de comportamiento del consumidor. ¿Qué dos componentes lo integran? ¿Por qué es útil separar ambos componentes para el diseño de políticas? Piense en el ejemplo de un impuesto al combustible: ¿cuál efecto mide el cambio de hábitos de transporte y cuál mide simplemente la pérdida de poder adquisitivo?

2.3.2. Respuesta

El efecto total mezcla dos fenómenos distintos. Cuando sube el precio de un bien, ese bien se vuelve relativamente más caro, pero además el consumidor pierde poder adquisitivo real. Por eso la caída observada en la demanda no mide sólo un cambio de preferencias o hábitos, sino también un empobrecimiento.

Los dos componentes son:

1. **Efecto sustitución:** cambio por el nuevo precio relativo, manteniendo constante el bienestar o el poder adquisitivo relevante.
2. **Efecto ingreso:** cambio por la pérdida de ingreso real causada por el alza de precio.

En un impuesto al combustible, el efecto sustitución mide el cambio de hábitos: usar transporte público, compartir auto o caminar más. El efecto ingreso mide que, al gastar más en combustible, queda menos presupuesto para todo lo demás. Separarlos importa porque una política puede querer cambiar conducta, recaudar o compensar a los hogares vulnerables.

Tabla 1: Separar el efecto total ayuda a interpretar políticas

componente	pregunta	ejemplo_combustible
Efecto sustitución	¿Cómo cambia el consumo porque cambió el precio relativo?	Cambiar auto por micro o metro
Efecto ingreso	¿Cómo cambia el consumo porque cambió el poder adquisitivo real?	Comprar menos porque el presupuesto alcanza para menos
Efecto total	¿Cuánto cambia finalmente la demanda observada?	Caída total observada del consumo de combustible

2.4. 4. Efecto sustitución

2.4.1. Enunciado

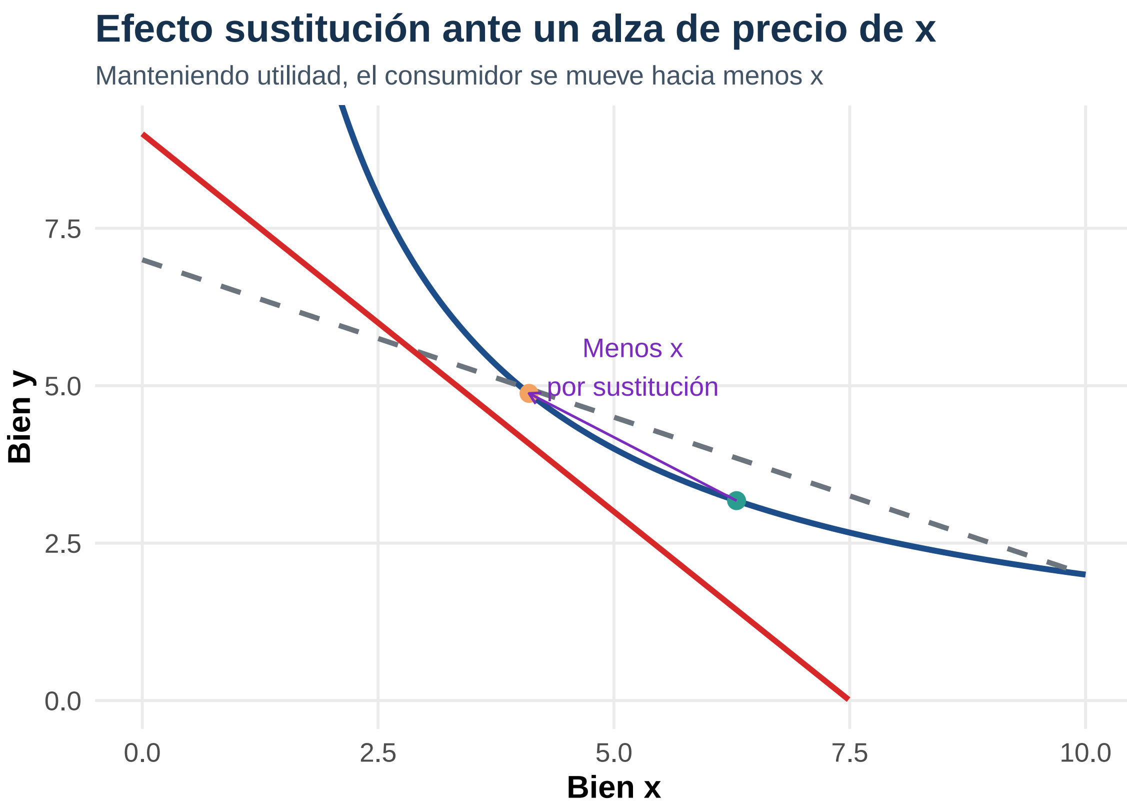
> **(Efecto sustitución: siempre en dirección opuesta al precio.)** El efecto sustitución de Slutsky mide el cambio en la demanda manteniendo el poder adquisitivo constante (es decir, manteniendo al consumidor en condiciones de comprar la cesta original al nuevo precio). Argumente geométricamente por qué el efecto sustitución de un aumento del precio de x es siempre negativo para x (se consume menos x), independientemente del tipo de bien. ¿Por qué esta propiedad es una consecuencia de la convexidad de las preferencias?

2.4.2. Respuesta

Cuando sube p_x, la recta presupuestaria se vuelve más empinada: x se encarece en términos de y. Para aislar el efecto sustitución, se compensa al consumidor para que pueda seguir comprando la canasta original o mantener su utilidad. Así se elimina el empobrecimiento y queda sólo el cambio en precios relativos.

Geométricamente, la recta compensada tiene la nueva pendiente, pero toca la misma curva de indiferencia inicial. Con preferencias convexas, el nuevo punto de tangencia se mueve hacia menos x y más y. Por eso, ante un aumento de p_x, el efecto sustitución sobre x es negativo.

La convexidad es clave porque implica preferencia por mezclas y TMS decreciente. Al encarecerse x, el consumidor sustituye hacia el bien relativamente más barato.



2.5. 5. Efecto ingreso

2.5.1. Enunciado

(Efecto ingreso: bienes normales versus inferiores.) Tras un aumento del precio de x, el consumidor pierde poder adquisitivo real. Para un bien normal, esa pérdida lleva a consumir menos x; para un bien inferior, la pérdida lleva a consumir más x. Explique la lógica económica detrás del bien inferior. ¿Puede pensar en ejemplos reales? ¿Es posible que el efecto ingreso domine al efecto sustitución? Si eso ocurre, ¿cómo se llama ese bien y qué implica para la pendiente de su curva de demanda?

2.5.2. Respuesta

Un bien inferior es un bien cuyo consumo cae cuando el ingreso aumenta. No significa que sea "malo", sino que al mejorar el ingreso el consumidor lo reemplaza por alternativas que prefiere.

Ejemplos posibles son algunos alimentos muy baratos, transporte público frente a auto para ciertos hogares, o productos de menor calidad.

Cuando sube el precio de x, el consumidor pierde ingreso real. Si x es normal, esa pérdida reduce el consumo de x. Si x es inferior, la pérdida puede aumentar el consumo de x, porque el consumidor se ve forzado a volver a opciones más baratas.

Sí, el efecto ingreso puede dominar al efecto sustitución. En ese caso aparece un **bien Giffen**: al subir su precio, aumenta su demanda. Eso implica una curva de demanda con pendiente positiva en el tramo relevante. Es un caso raro porque requiere que el bien sea inferior y represente una parte importante del presupuesto.

Tabla 2: Efecto ingreso según tipo de bien

tipo_bien	si ingreso real cae	ante alza de precio	pendiente demanda
Normal	Baja consumo de x	ES y EI reducen x	Negativa
Inferior	Sube consumo de x	ES reduce x, EI aumenta x	Usualmente negativa
Giffen	Sube tanto que domina sustitución	La demanda total de x aumenta	Positiva en tramo relevante

2.6. 6. La ecuación de Slutsky

2.6.1. Enunciado

(La ecuación de Slutsky: una identidad contable.) La ecuación de Slutsky establece que el efecto total de un cambio de precio sobre la demanda es igual a la suma del efecto sustitución más el efecto ingreso:

$$\underbrace{\frac{\partial x}{\partial p_x}}_{\text{efecto total}} = \underbrace{\frac{\partial x^h}{\partial p_x}}_{\text{ef. sustitución}} - \underbrace{x \cdot \frac{\partial x}{\partial m}}_{\text{ef. ingreso}},$$

donde x^h es la demanda hicksiana (compensada). Comente el signo de cada término para un bien normal y para un bien inferior. ¿Por qué el efecto ingreso viene multiplicado por la cantidad consumida x? ¿Qué implica eso para consumidores que gastan una fracción grande versus pequeña de su ingreso en ese bien?

2.6.2. Respuesta

La ecuación de Slutsky separa el cambio total en dos piezas. El efecto sustitución es negativo ante un alza de p_x: cuando x se encarece, se consume menos x manteniendo utilidad constante.

Para un bien normal, $\partial x/\partial m > 0$. Entonces el término de ingreso $-x(\partial x/\partial m)$ es negativo: el alza de precio reduce poder adquisitivo y eso también reduce x.

Para un bien inferior, $\partial x/\partial m < 0$. Entonces el efecto ingreso es positivo: la pérdida de ingreso real empuja a consumir más x.

El término viene multiplicado por x porque el impacto del alza de precio sobre el poder adquisitivo depende de cuánto consumía originalmente el hogar. Si un bien ocupa una gran parte del presupuesto, un alza de su precio empobrece mucho más al consumidor que si ocupa una parte pequeña.

Tabla 3: Signos en la ecuación de Slutsky ante un alza de precio

caso	efecto sustitución	efecto ingreso	efecto total
Bien normal	Negativo	Negativo	Negativo
Bien inferior	Negativo	Positivo	Ambiguo, usualmente negativo
Bien Giffen	Negativo	Positivo y dominante	Positivo

2.7. 7. Complementos perfectos: Leontief y proporciones fijas

2.7.1. Enunciado

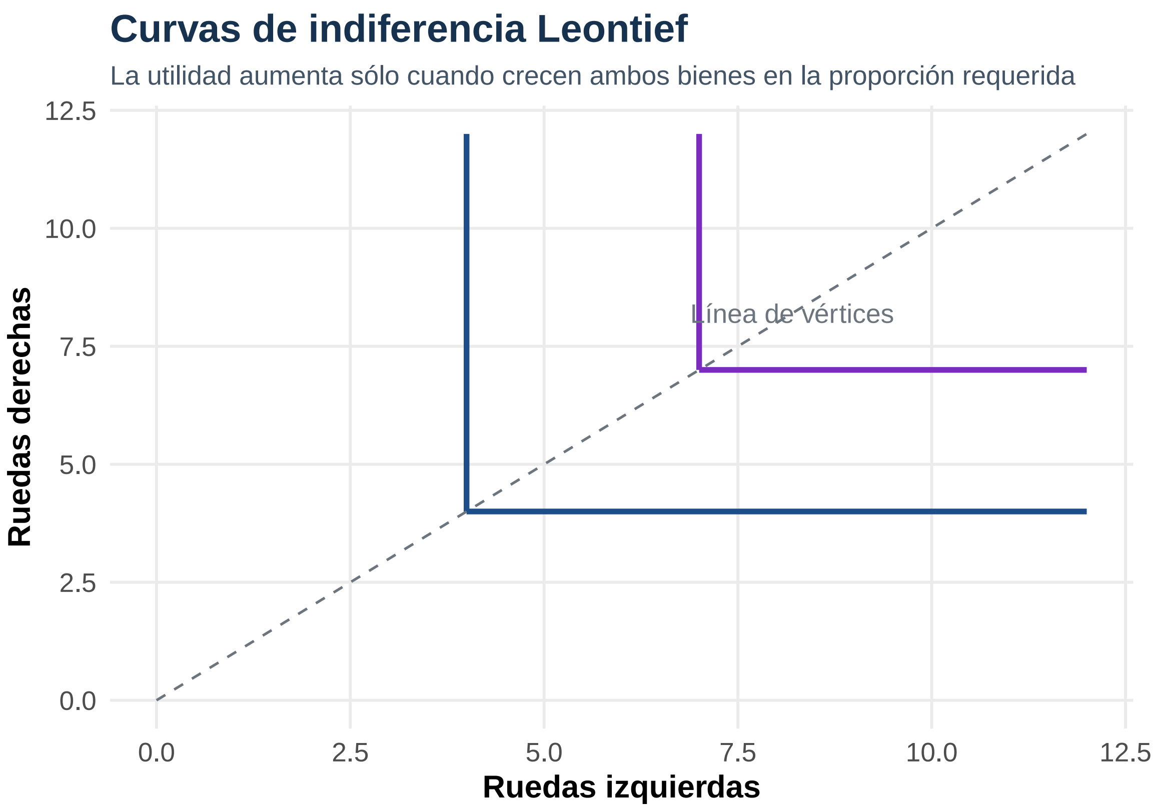
> **(Complementos perfectos: Leontief y proporciones fijas.)** Imaginemos a un consumidor que siempre usa exactamente una rueda izquierda y una rueda derecha: no tiene sentido tener más de un tipo sin el otro. Explique cómo lucen las curvas de indiferencia de este consumidor (forma de "L"). ¿Qué ocurre con el efecto sustitución cuando sube el precio de las ruedas derechas? ¿Por qué es cero? ¿Qué implica esto para la elasticidad precio de la demanda de cada componente? ¿Cómo se determina el óptimo sin usar la condición de tangencia?

2.7.2. Respuesta

Con complementos perfectos, los bienes se consumen en proporciones fijas. Las curvas de indiferencia tienen forma de "L": el vértice indica la combinación exacta necesaria. Tener más de un bien sin el otro no aumenta la utilidad.

El efecto sustitución es cero porque el consumidor no puede reemplazar ruedas derechas por izquierdas. Si necesita una de cada una, un cambio de precio no cambia la proporción elegida. Lo que sí cambia es el poder adquisitivo: al subir un precio, compra menos pares completos.

El óptimo se determina ubicando el vértice de la curva de indiferencia más alta que toca la restricción presupuestaria. No hay tangencia suave porque la curva no es diferenciable en el vértice.



2.8. 8. Sustitutos perfectos: curvas de indiferencia lineales

2.8.1. Enunciado

> **(Sustitutos perfectos: curvas de indiferencia lineales.)** Un consumidor es indiferente entre Coca-Cola y Pepsi: para él son exactamente lo mismo. Explique cómo lucen sus curvas de indiferencia (líneas rectas). ¿Cuál es su TMS? ¿Cómo elige este consumidor entre los dos bienes según los precios relativos? Describa los

tres casos posibles: precio relativo mayor, menor e igual a la TMS. ¿Es el óptimo siempre una solución de esquina?

2.8.2. Respuesta

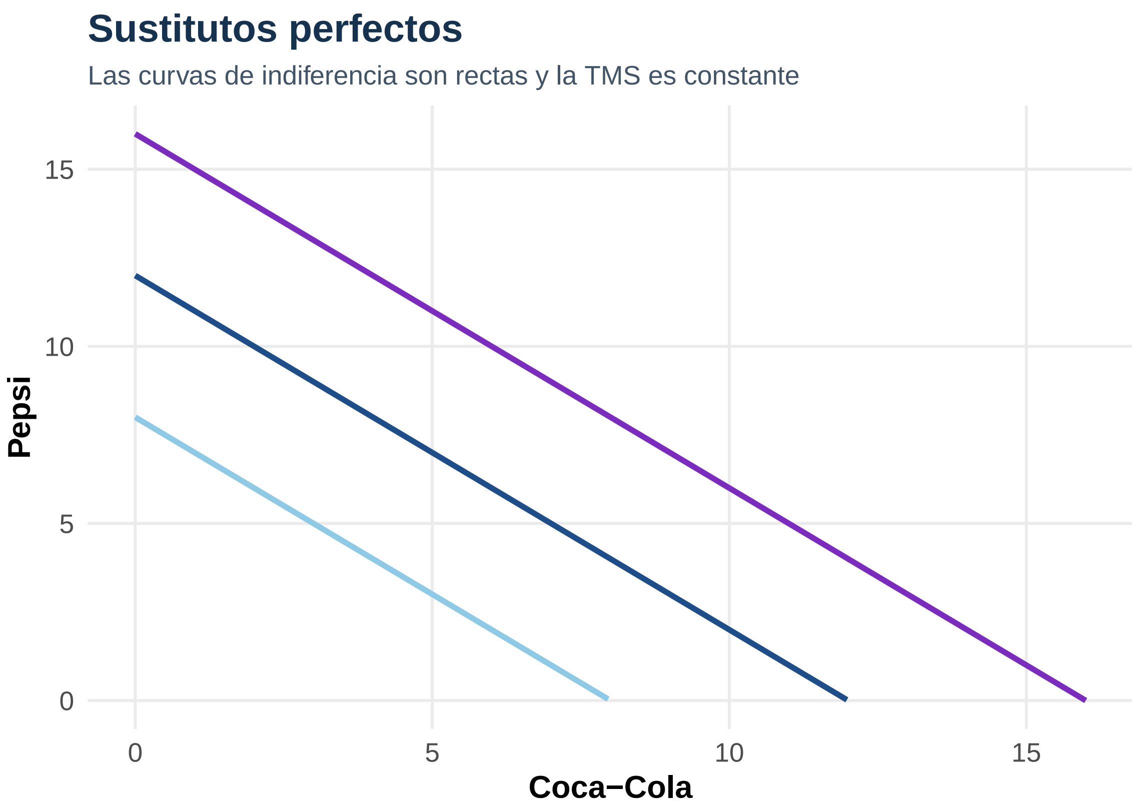
Si Coca-Cola y Pepsi son sustitutos perfectos uno a uno, la utilidad puede representarse como:

$$U(x, y) = x + y.$$

Las curvas de indiferencia son rectas con pendiente -1 y TMS constante igual a 1. El consumidor compara la TMS con el precio relativo:

- si x entrega utilidad más barata que y, compra sólo x;
- si y entrega utilidad más barata que x, compra sólo y;
- si ambos tienen el mismo precio por unidad de utilidad, cualquier combinación sobre la recta presupuestaria es óptima.

Por tanto, el óptimo suele ser de esquina, pero no siempre. Cuando los precios relativos empatan exactamente con la TMS, hay infinitos óptimos.



2.9. 9. Demanda hicksiana versus marshalliana

2.9.1. Enunciado

> **(Demanda hicksiana versus marshalliana: dos maneras de mirar el mismo problema.)** La demanda marshalliana $x(p_x, p_y, m)$ mantiene constante el ingreso nominal y varía el precio. La demanda hicksiana $x^h(p_x, p_y, \bar{U})$ mantiene constante la utilidad y varía el precio. Explique geométricamente la diferencia entre ambas demandas. ¿Cuál corresponde al movimiento a lo largo de una curva de indiferencia? ¿Cuál cruza curvas de indiferencia distintas? Para un bien normal, ¿cuál demanda es más elástica ante cambios de precio? ¿Por qué la demanda hicksiana es útil para medir el bienestar del consumidor (variación compensatoria y equivalente)?

2.9.2. Respuesta

La demanda marshalliana mira lo que compra el consumidor con ingreso nominal fijo. Si sube un precio, cambia el precio relativo y además cae el poder adquisitivo. Por eso la canasta final puede quedar en una curva de indiferencia más baja.

La demanda hicksiana mantiene constante la utilidad. Pregunta: ¿cuál es la canasta más barata que permite alcanzar el mismo bienestar con los nuevos precios? Por eso se mueve sobre una misma curva de indiferencia y aísla el efecto sustitución.

Para un bien normal, la demanda marshalliana es más elástica que la hicksiana porque incluye sustitución e ingreso. La hicksiana es útil para bienestar porque permite calcular cuánta compensación monetaria se necesitaría para dejar al consumidor igual que antes.

Tabla 4: Demanda marshalliana versus hicksiana

demanda	mantiene_constante	mide	geometria
Marshalliana	Ingreso nominal m	Efecto total	Cruza curvas de indiferencia
Hicksiana	Utilidad U	Efecto sustitución puro	Se mueve sobre una curva de indiferencia

2.10. 10. Política pública y la descomposición de Slutsky

2.10.1. Enunciado

> **(Política pública y la descomposición de Slutsky.)** Un gobierno sube el IVA a los alimentos básicos para recaudar más ingresos y luego devuelve esa recaudación a las familias más pobres como una transferencia de suma fija. Use la descomposición de Slutsky para analizar el efecto neto sobre el consumo de alimentos: ¿cómo afecta el alza del IVA al efecto sustitución y al efecto ingreso por separado?, ¿cómo contrarresta la transferencia al efecto ingreso negativo?, y ¿queda algún efecto residual sobre el consumo de alimentos una vez hecha la transferencia? ¿Difiere el resultado si el alimento es un bien normal o uno inferior?

2.10.2. Respuesta

El IVA sube el precio relativo de los alimentos básicos. Eso genera un efecto sustitución: los hogares tienden a comprar menos alimentos gravados y más bienes relativamente más baratos, si existen sustitutos.

Además, el IVA reduce el poder adquisitivo real. Para alimentos normales, esa pérdida de ingreso reduce aún más el consumo. La transferencia de suma fija compensa este segundo componente: devuelve poder de compra, por lo que puede neutralizar parte o todo el efecto ingreso.

Pero incluso con transferencia completa puede quedar un efecto residual: el efecto sustitución. El precio relativo cambió, así que el hogar puede seguir consumiendo menos del alimento gravado.

Si el alimento fuera inferior, la pérdida de ingreso podría aumentar su consumo; una transferencia posterior podría reducir ese componente. Por eso el efecto neto depende de si el bien es normal, inferior o muy difícil de sustituir.

Tabla 5: IVA, transferencia y Slutsky

mecanismo	efecto	implicancia
IVA	Sube precio relativo y reduce ingreso real	ES negativo y EI usualmente negativo si alimento normal
Transferencia	Restaura poder adquisitivo, pero no cambia el precio relativo	Compensa el EI negativo
Resultado residual	Puede quedar menor consumo por sustitución	El consumo no necesariamente vuelve al nivel inicial

3. Parte II. Matemático I: Optimización Cobb-Douglas y descomposición de Slutsky

3.1. Contexto

Ignacio tiene ingreso $m = 120$ y enfrenta precios $p_x = 2$ y $p_y = 4$. Sus preferencias son Cobb-Douglas:

$$U(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}.$$

A lo largo del ejercicio el precio p_x sube de 2 a 8, mientras que p_y y m permanecen constantes. El objetivo es calcular las demandas óptimas, descomponer el efecto del cambio de precio en efecto sustitución y efecto ingreso, y construir la curva de demanda marshalliana e interpretar geométricamente cada objeto.

3.2. 1. Preparación: geometría y TMS

3.2.1. Enunciado

(Preparación: geometría y TMS.)

(a) Grafique la restricción presupuestaria inicial en el plano (x, y), con x en el eje horizontal. Calcule los interceptos y la pendiente. Interprete la pendiente como el precio relativo de x en términos de y.

(b) Despeje y de la condición $U(x, y) = \bar{U}$ para obtener la ecuación de una curva de indiferencia genérica:

$$y = \frac{\bar{U}^3}{x^2}.$$

Grafique tres curvas de indiferencia ($\bar{U} = 2, 4, 6$) sobre el mismo plano. ¿Son convexas al origen? ¿Se intersectan?

(c) Calcule la TMS $= -dy/dx|_{\bar{U}}$ a lo largo de una curva de indiferencia. Evalúela en $(10, 5)$ y en $(5, 10)$. ¿Es decreciente en x? Interprete.

3.2.2. Respuesta

La restricción inicial es:

$$2x + 4y = 120.$$

Despejando:

$$y = 30 - 0{,}5x.$$

Los interceptos son:

- si $y = 0$, $x = 60$;
- si $x = 0$, $y = 30$.

La pendiente es:

$$-\frac{p_x}{p_y} = -\frac{2}{4} = -0{,}5.$$

Esto significa que consumir una unidad adicional de x cuesta 0,5 unidades de y.

Para la curva de indiferencia:

$$x^{2/3}y^{1/3} = \bar{U}.$$

Elevando al cubo:

$$x^2 y = \bar{U}^3.$$

Luego:

$$y = \frac{\bar{U}^3}{x^2}.$$

Derivando:

$$\frac{dy}{dx} = -2\frac{\bar{U}^3}{x^3} = -2\frac{y}{x}.$$

Por tanto:

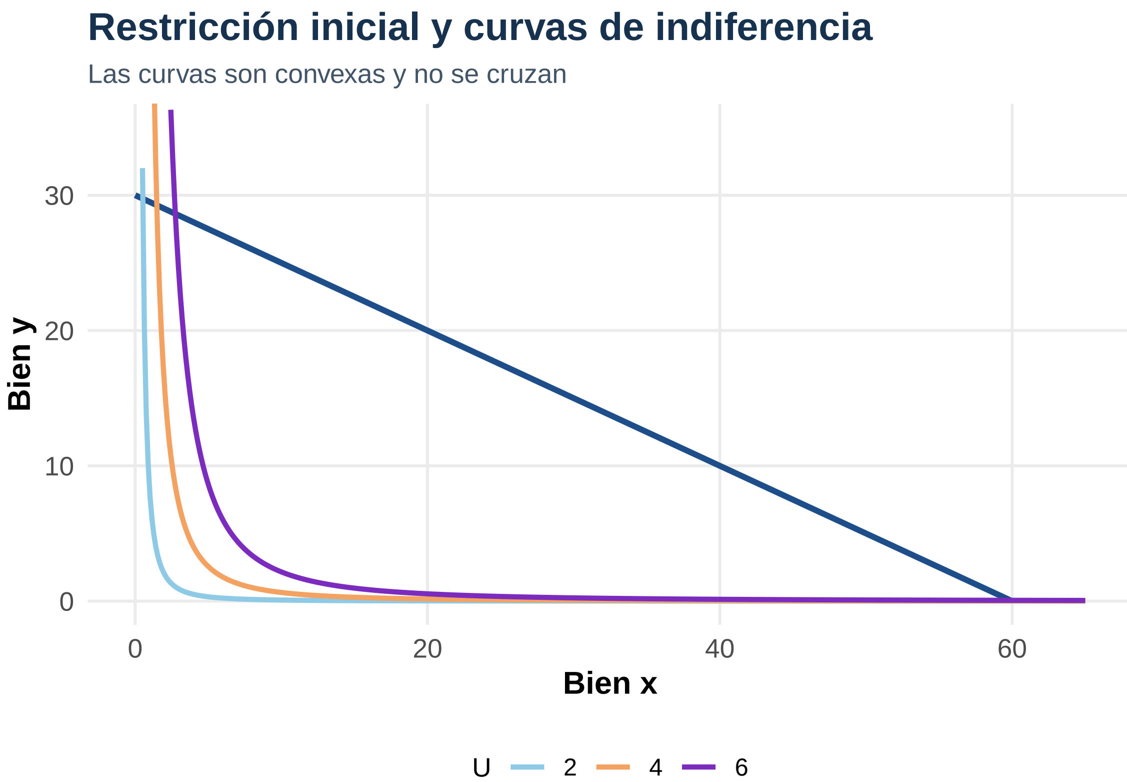
$$\text{TMS} = -\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x}.$$

Evaluando:

$$\text{TMS}(10, 5) = 2\frac{5}{10} = 1,$$

$$\text{TMS}(5, 10) = 2\frac{10}{5} = 4.$$

La TMS es mayor cuando x es escaso y menor cuando x es abundante. Eso refleja convexidad y preferencia por canastas balanceadas.



3.3. 2. Óptimo inicial: condición de tangencia

3.3.1. Enunciado

(Óptimo inicial: condición de tangencia.)

(a) Escriba la condición de tangencia $\text{TMS} = p_x/p_y$ e interprete: ¿qué igualdad entre tasa de cambio subjetiva y objetiva caracteriza el óptimo?

(b) Usando la condición de tangencia y la restricción presupuestaria $2x + 4y = 120$, encuentre las demandas óptimas iniciales (x_0^*, y_0^*).

Hint: Para $U = x^\alpha y^{1-\alpha}$ con restricción $p_x x + p_y y = m$:

$$x^* = \alpha \frac{m}{p_x}, \qquad y^* = (1-\alpha)\frac{m}{p_y}.$$

(c) Calcule $U_0^* = U(x_0^*, y_0^*)$ y señale el óptimo en el gráfico del literal anterior. Verifique que la curva de indiferencia correspondiente es tangente a la recta presupuestaria (las pendientes son iguales en ese punto).

3.3.2. Respuesta

La condición de tangencia dice:

$$\text{TMS} = \frac{p_x}{p_y}.$$

En palabras: en el óptimo, la tasa a la que Ignacio está dispuesto a cambiar y por x coincide con la tasa objetiva a la que el mercado permite cambiar y por x.

Como $\alpha = 2/3$:

$$x_0^* = \frac{2}{3}\frac{120}{2} = 40,$$

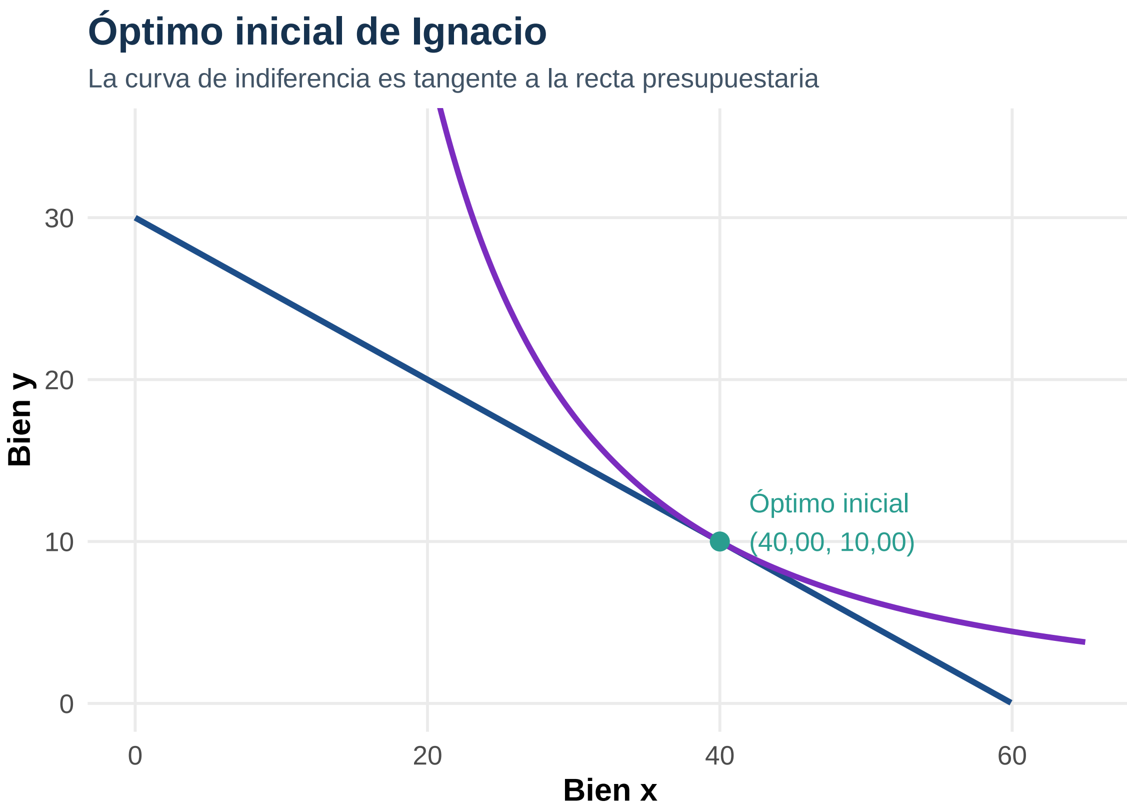
$$y_0^* = \frac{1}{3}\frac{120}{4} = 10.$$

La utilidad inicial es:

$$U_0^* = 40^{2/3}10^{1/3} \approx 25,20.$$

Verificación de tangencia:

$$\text{TMS}(40, 10) = 2\frac{10}{40} = 0{,}5 = \frac{2}{4}.$$



3.4. 3. Nuevo óptimo tras el alza de precio

3.4.1. Enunciado

(Nuevo óptimo tras el alza de precio.) El precio de x sube a $p'_x = 8$.

(a) Grafique la nueva restricción presupuestaria en el mismo plano. ¿Cómo cambia el intercepto en x? ¿Y el intercepto en y? ¿Rota o desplaza la recta?

(b) Calcule el nuevo óptimo (x_1^*, y_1^*) con $p'_x = 8$, $p_y = 4$, $m = 120$.

(c) Calcule $U_1^* = U(x_1^*, y_1^*)$ y señale el nuevo óptimo en el gráfico. ¿La utilidad subió o bajó? ¿Por qué?

(d) El **efecto total** sobre la demanda de x es $\Delta x^{total} = x_1^* - x_0^*$. Calcúlelo.

3.4.2. Respuesta

Con el nuevo precio:

$$8x + 4y = 120 \quad \Rightarrow \quad y = 30 - 2x.$$

El intercepto en x cae de 60 a 15. El intercepto en y se mantiene en 30, porque p_y y m no cambian. La recta **rota hacia adentro** alrededor del intercepto vertical.

Las nuevas demandas son:

$$x_1^* = \frac{2}{3}\frac{120}{8} = 10,$$

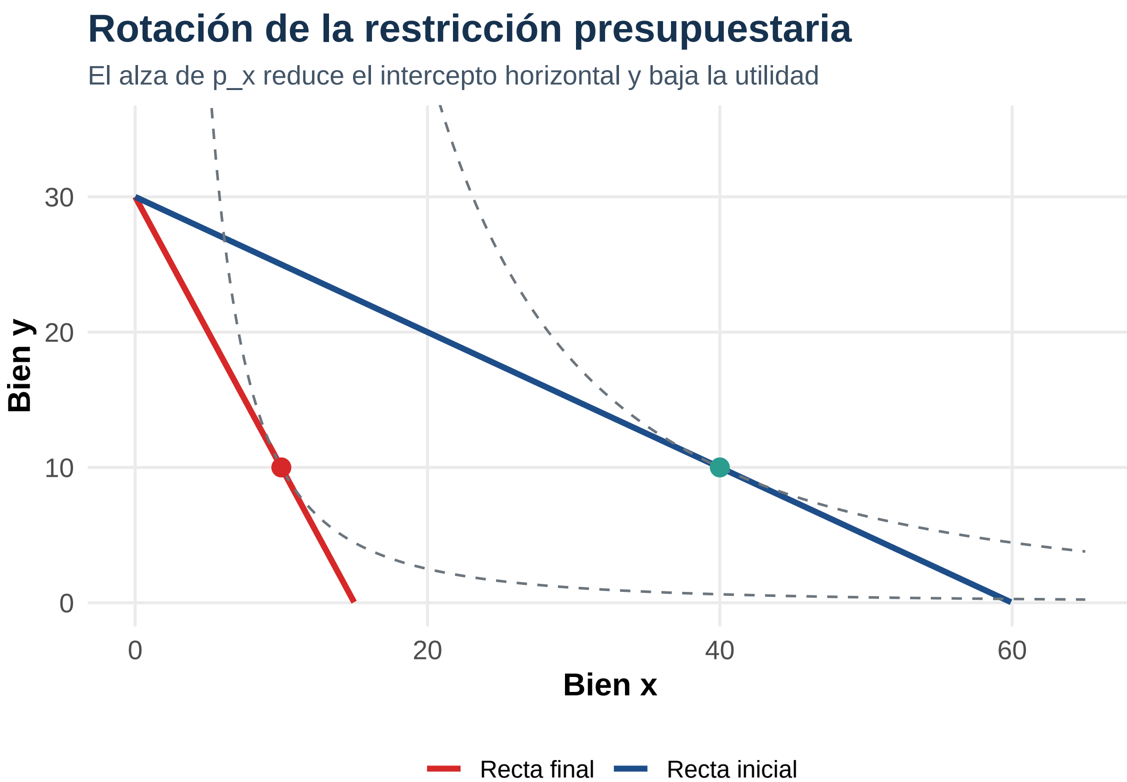
$$y_1^* = \frac{1}{3}\frac{120}{4} = 10.$$

La nueva utilidad es:

$$U_1^* = 10^{2/3}10^{1/3} = 10.$$

La utilidad baja porque el alza de p_x reduce el conjunto factible de consumo. El efecto total sobre x es:

$$\Delta x^{total} = 10 - 40 = -30.$$



3.5. 4. Descomposición de Slutsky: efecto sustitución

3.5.1. Enunciado

(Descomposición de Slutsky: efecto sustitución.) Para aislar el efecto sustitución mantenemos la utilidad en el nivel inicial U_0^* pero variamos los precios al nuevo nivel $(p_x', p_y) = (8, 4)$. La demanda compensada x^h minimiza el gasto necesario para alcanzar U_0^* a los nuevos precios.

Procedimiento para encontrar la demanda hicksiana x^h: en el óptimo compensado, la TMS debe igualarse al **nuevo** precio relativo: $\text{TMS} = p_x'/p_y$. Esto da una relación entre x^h e y^h. Luego se impone $U(x^h, y^h) = U_0^*$ para obtener los valores exactos.

(a) Iguale la TMS al nuevo precio relativo $p_x'/p_y = 2$ para obtener una relación $y^h = f(x^h)$.

(b) Sustituya en $U(x^h, y^h) = U_0^*$ y resuelva para x^h e y^h.

(c) El **efecto sustitución** es $ES = x^h - x_0^*$. Calcúlelo. ¿Es positivo o negativo? ¿Era esperable ese signo?

(d) **Geometría del efecto sustitución:** grafique la recta "compensada" (con pendiente del nuevo precio relativo, tangente a la curva de indiferencia U_0^*). El movimiento de x_0^* a x^h a lo largo de esa curva de indiferencia es el efecto sustitución. ¿El consumidor sube o baja en la curva de indiferencia inicial?

3.5.2. Respuesta

La nueva condición de tangencia es:

$$2\frac{y^h}{x^h} = \frac{8}{4} = 2.$$

Por tanto:

$$y^h = x^h.$$

Como debe mantenerse la utilidad inicial:

$$(x^h)^{2/3}(y^h)^{1/3} = U_0^*.$$

Sustituyendo $y^h = x^h$:

$$x^h = U_0^* \approx 25,20.$$

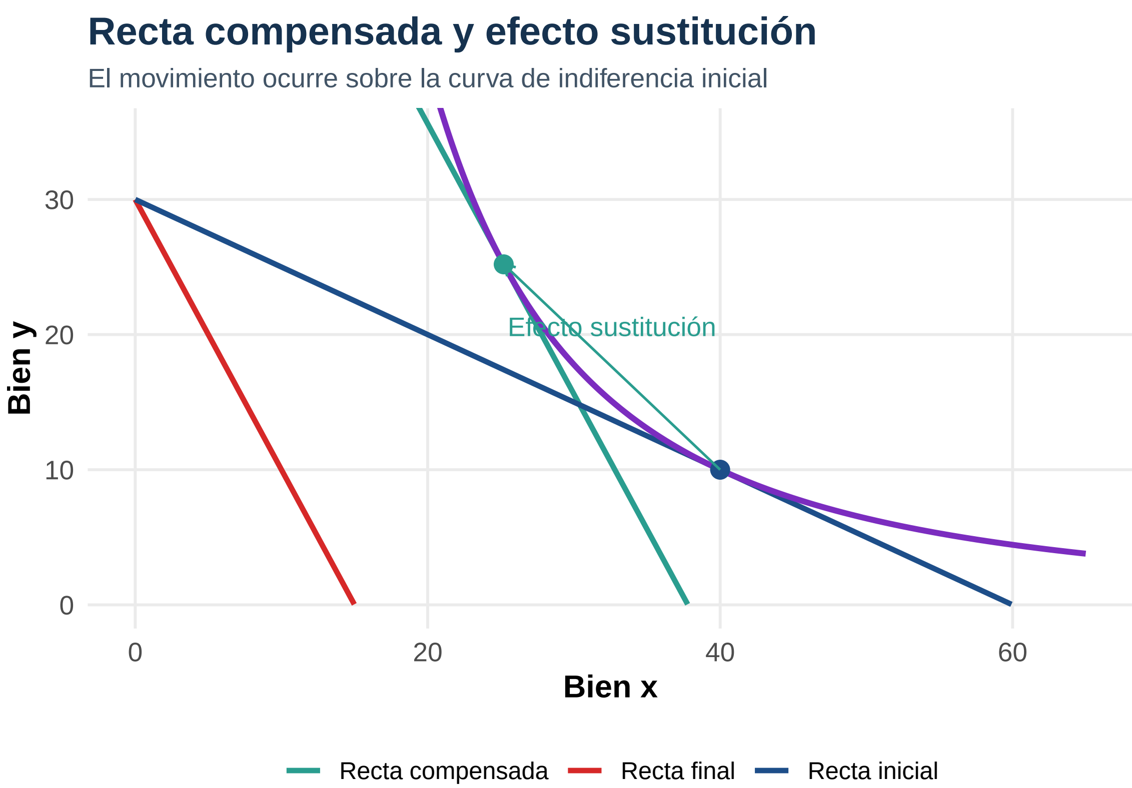
Luego:

$$(x^h, y^h) = (25,20, 25,20).$$

El efecto sustitución es:

$$ES = x^h - x_0^* = 25,20 - 40 = -14,80.$$

Es negativo, como era esperable: al subir el precio relativo de x, Ignacio sustituye fuera de x y hacia y, manteniendo la misma utilidad.



3.6. 5. Descomposición de Slutsky: efecto ingreso

3.6.1. Enunciado

(Descomposición de Slutsky: efecto ingreso.)

(a) El efecto ingreso es el efecto residual: $EI = x_1^* - x^h$. Calcúlelo.

(b) ¿Es positivo o negativo? ¿Qué tipo de bien es x para Ignacio (normal o inferior)?

(c) Verifique la identidad de Slutsky:

$$\Delta x^{total} = ES + EI.$$

(d) **Geometría del efecto ingreso:** el movimiento de x^h a x_1^* corresponde a desplazar la recta presupuestaria en forma paralela (mismo precio relativo, menor ingreso real). Grafique este movimiento en el plano. En un mismo gráfico indique claramente los tres puntos: óptimo inicial, óptimo compensado y óptimo final.

3.6.2. Respuesta

El efecto ingreso es:

$$EI = x_1^* - x^h = 10 - 25,20 = -15,20.$$

Es negativo. Eso confirma que x es un bien normal para Ignacio: al perder poder adquisitivo real, consume menos x.

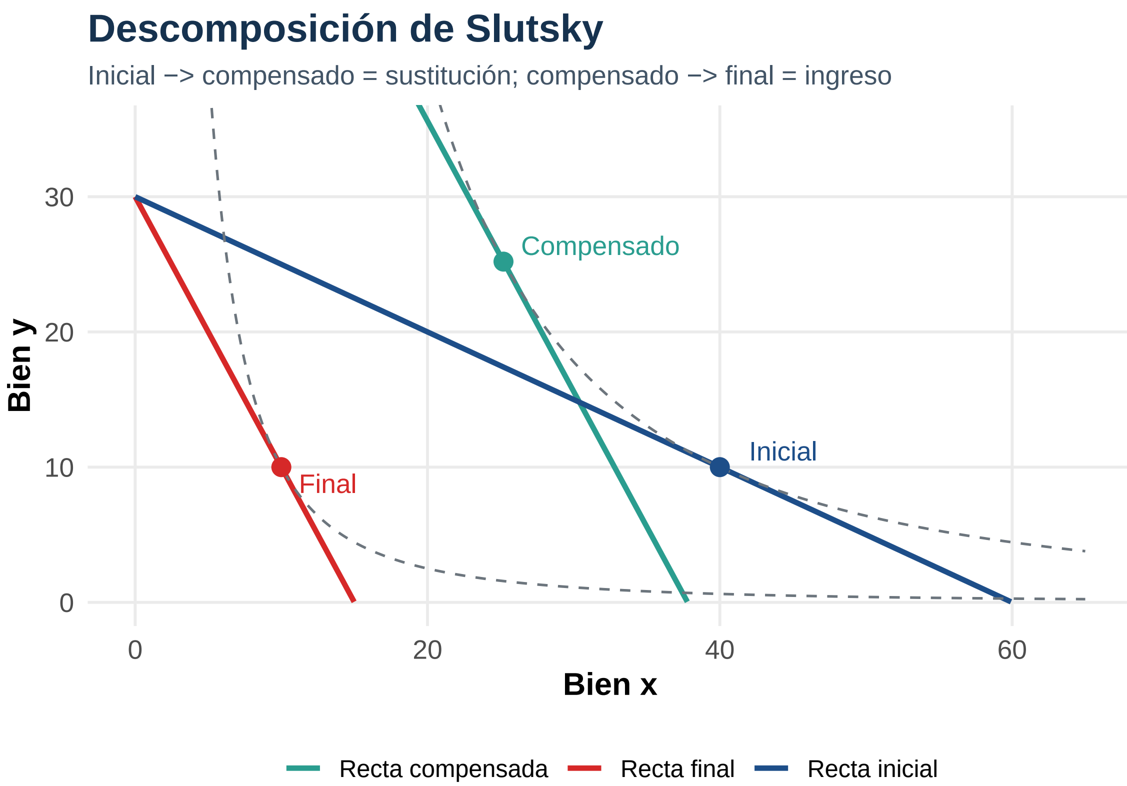
La identidad de Slutsky se verifica:

$$\Delta x^{total} = ES + EI.$$

Numéricamente:

$$-30 = -14,80 + -15,20.$$

El paso de (x^h, y^h) a (x_1^*, y_1^*) mantiene la pendiente nueva, pero desplaza la recta hacia adentro. Ese movimiento captura la pérdida de poder adquisitivo.



3.7. 6. La curva de demanda marshalliana

3.7.1. Enunciado

(La curva de demanda marshalliana.)

(a) Usando la fórmula general $x^* = \alpha m/p_x$, exprese la demanda de x como función del precio p_x (para $m = 120$, $\alpha = 2/3$).

(b) Grafique la curva de demanda en el plano (x, p_x) para $p_x \in [1, 20]$. ¿Es lineal o curva?

(c) Calcule la elasticidad precio de la demanda:

$$\varepsilon_{x,p_x} = \frac{\partial x^*}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{x^*}.$$

¿Es constante? ¿Qué valor toma?

(d) Señale sobre la curva de demanda los puntos correspondientes a $p_x = 2$ y $p_x = 8$ (los dos niveles de precio del ejercicio). El segmento entre ellos ilustra el efecto total Δx^{total}.

3.7.2. Respuesta

La demanda marshalliana es:

$$x^*(p_x) = \frac{2}{3}\frac{120}{p_x} = \frac{80}{p_x}.$$

No es lineal: es una hipérbola rectangular. Su pendiente es negativa y se va aplanando a medida que sube la cantidad.

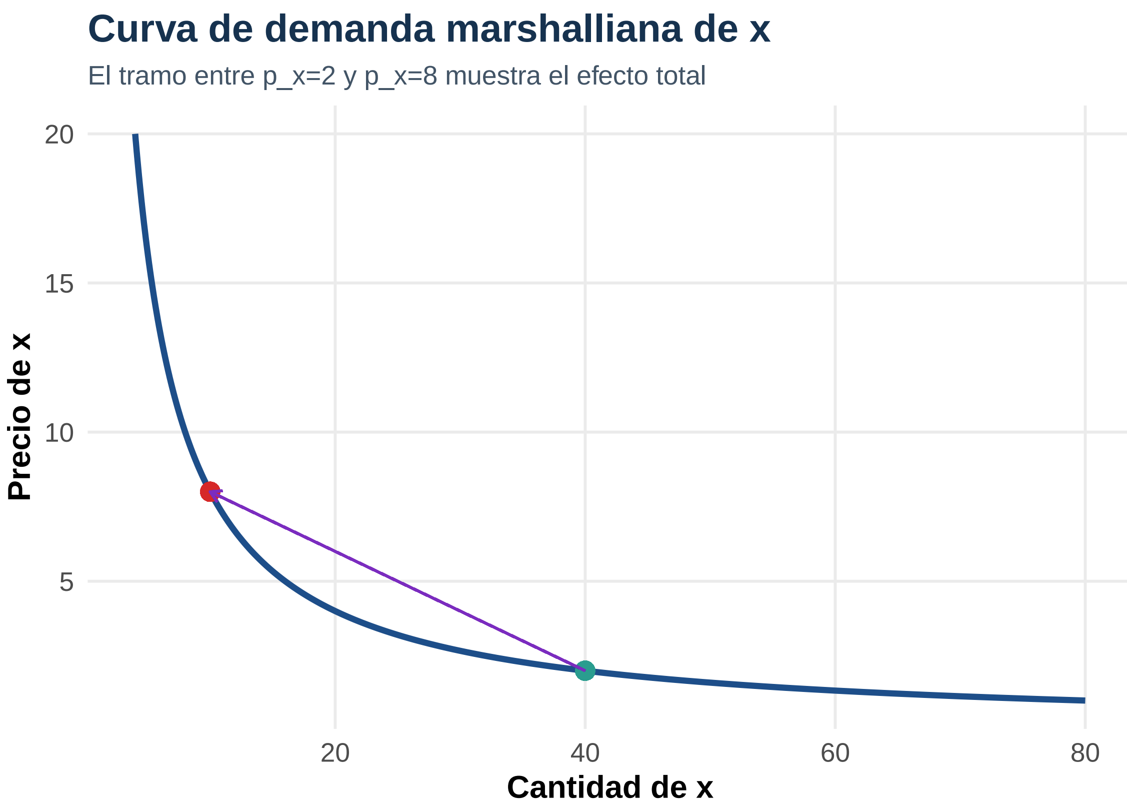
La elasticidad precio es:

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_x} = -\frac{80}{p_x^2}.$$

Entonces:

$$\varepsilon_{x,p_x} = \left(-\frac{80}{p_x^2}\right)\frac{p_x}{80/p_x} = -1.$$

Es constante e igual a -1.



3.8. 7. Curva de Engel y efecto ingreso puro

3.8.1. Enunciado

(Curva de Engel y efecto ingreso puro.)

(a) Manteniendo $p_x = 2$ y $p_y = 4$ fijos, exprese x^* como función del ingreso m y grafique la curva de Engel de x en el plano (x, m). ¿Es lineal? ¿Pasa por el origen?

(b) Repita para y^* en función de m.

(c) Un aumento del ingreso de 120 a 180 ¿en cuánto aumenta x^*? ¿En qué porcentaje? ¿Es x un bien normal, de lujo o de primera necesidad? (Hint: un bien de lujo tiene elasticidad ingreso > 1; una necesidad, < 1.)

3.8.2. Respuesta

Con precios iniciales fijos:

$$x^*(m) = \frac{2}{3}\frac{m}{2} = \frac{m}{3}.$$

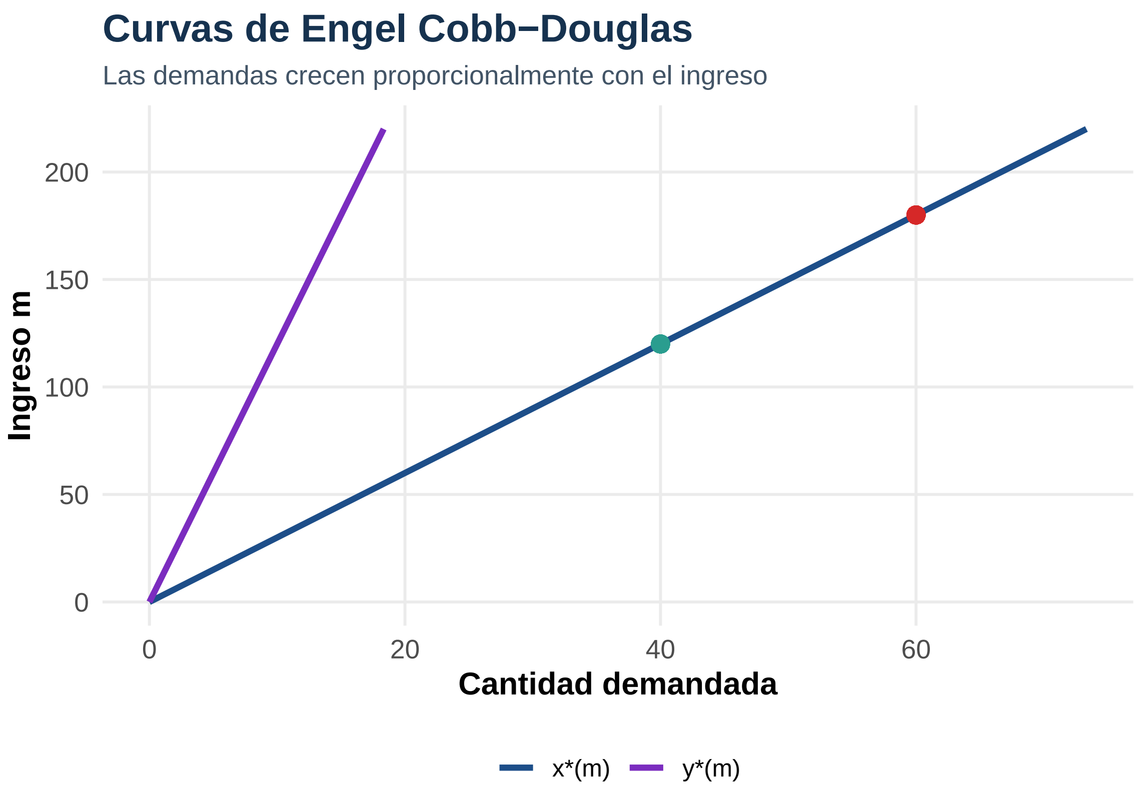
Para y:

$$y^*(m) = \frac{1}{3}\frac{m}{4} = \frac{m}{12}.$$

Ambas curvas de Engel son lineales y pasan por el origen. Si el ingreso sube de 120 a 180:

$$x^*(120) = 40, \qquad x^*(180) = 60.$$

El aumento es de 20 unidades, equivalente a un 50 %. Como el ingreso también aumenta 50 %, la elasticidad ingreso es 1. Entonces x es un bien normal de elasticidad unitaria: no es de lujo ni de primera necesidad bajo esta clasificación.



4. Parte III. Matemático II: Preferencias Leontief (complementos perfectos)

4.1. Contexto

Beatriz consume café (x) y azúcar (y). Para ella, una taza de café requiere exactamente dos cucharadas de azúcar: ni más ni menos. Sus preferencias son Leontief:

$$U(x, y) = \text{mín}\left(\frac{x}{1}, \frac{y}{2}\right) = \text{mín}\left(x, \frac{y}{2}\right).$$

Su ingreso es $m = 60$, los precios iniciales son $p_x = 4$ y $p_y = 1$. El precio del café luego sube a $p_x' = 9$. El análisis es íntegramente geométrico: no se usa cálculo diferencial (las curvas de indiferencia Leontief no son diferenciables en el vértice).

4.2. 1. Geometría de las preferencias Leontief

4.2.1. Enunciado

(Geometría de las preferencias Leontief.)

(a) Describa la forma de las curvas de indiferencia de Beatriz. ¿Dónde está el vértice (la "esquina") de la curva correspondiente al nivel $\bar{U}$? Ecuación del vértice: $x = \bar{U}$ e $y = 2\bar{U}$.

(b) Grafique en el plano (x, y) las curvas de indiferencia para $\bar{U} = 5, 10, 15$. Trace también la **línea de vértices**: $y = 2x$. ¿Qué representa esta línea?

(c) Explique intuitivamente por qué consumir más y de lo que indica la línea de vértices no aumenta la utilidad de Beatriz. ¿Y consumir más x?

4.2.2. Respuesta

Las curvas de indiferencia tienen forma de "L". Para alcanzar utilidad $\bar{U}$, Beatriz necesita:

$$x \geq \bar{U}, \qquad \frac{y}{2} \geq \bar{U}.$$

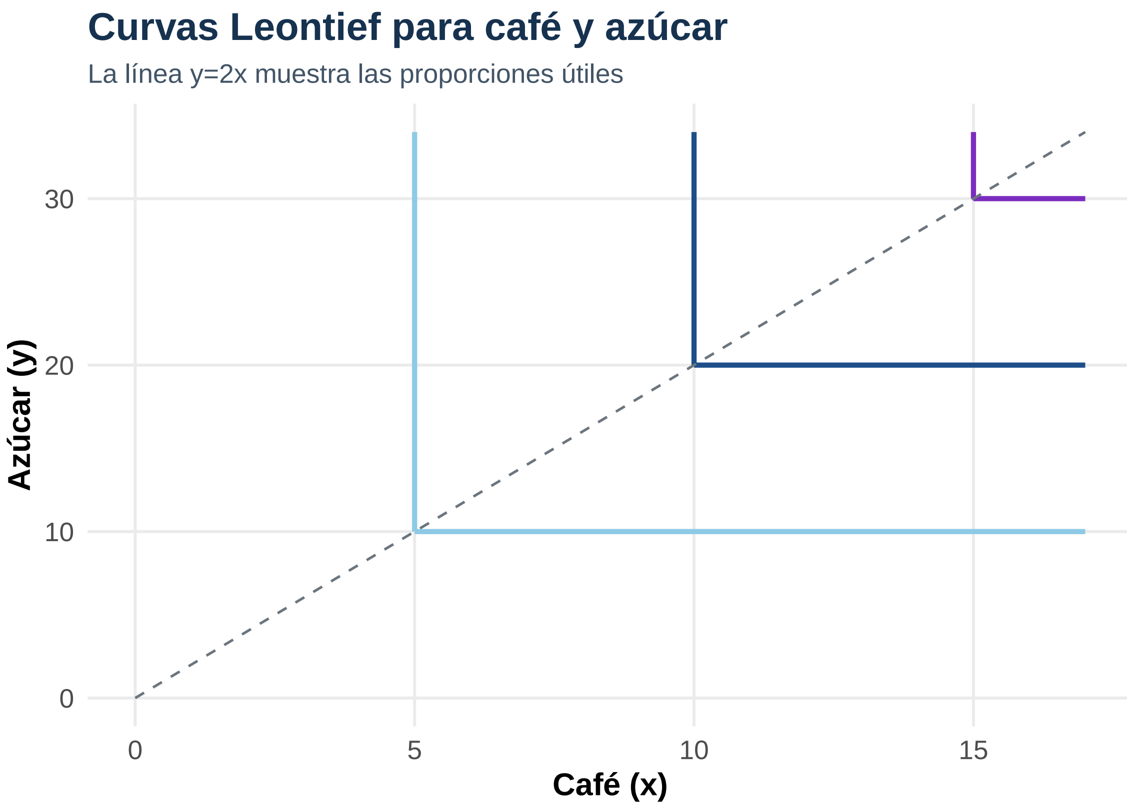
El vértice está en:

$$(x, y) = (\bar{U}, 2\bar{U}).$$

La línea de vértices es:

$$y = 2x.$$

Representa las combinaciones técnicamente balanceadas: por cada unidad de café, dos unidades de azúcar. Consumir más azúcar que eso no aumenta la utilidad porque falta café; consumir más café tampoco ayuda si no hay suficiente azúcar.



4.3. 2. Óptimo inicial: regla del vértice

4.3.1. Enunciado

(Óptimo inicial: regla del vértice.)

(a) El óptimo de Beatriz siempre está en la línea de vértices $y = 2x$ (explicar por qué: consumir fuera de ella es despilfarrar). Usando $y = 2x$ y la restricción presupuestaria $4x + y = 60$, encuentre (x_0^*, y_0^*).

(b) Calcule $U_0^* = U(x_0^*, y_0^*)$.

(c) Grafique la restricción presupuestaria inicial y el óptimo, mostrando la curva de indiferencia tangente al vértice. ¿La recta presupuestaria es tangente o corta la curva de indiferencia en el óptimo? Interprete.

4.3.2. Respuesta

Como el óptimo debe estar en la línea de vértices:

$$y = 2x.$$

Usando la restricción:

$$4x + y = 60.$$

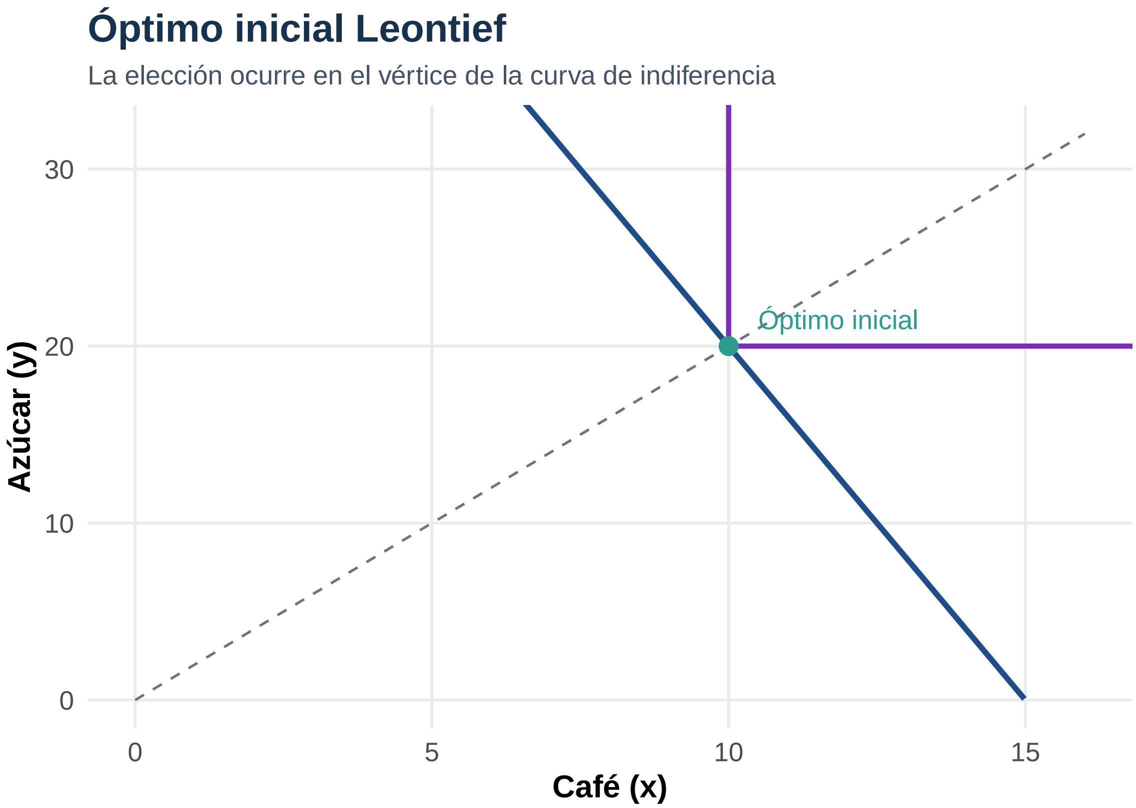
Sustituyendo:

$$4x + 2x = 60 \quad \Rightarrow \quad 6x = 60 \quad \Rightarrow \quad x_0^* = 10.$$

Luego:

$$y_0^* = 20, \qquad U_0^* = 10.$$

La recta presupuestaria no es tangente en el sentido suave de Cobb-Douglas; toca la curva en su vértice. Ese vértice es el punto donde no se desperdicia café ni azúcar.



4.4. 3. Nuevo óptimo tras el alza del precio del café

4.4.1. Enunciado

(Nuevo óptimo tras el alza del precio del café.) El precio del café sube a $p'_x = 9$.

(a) Encuentre el nuevo óptimo (x_1^*, y_1^*) con $9x + y = 60$ y $y = 2x$.

(b) Calcule $U_1^* = U(x_1^*, y_1^*)$. ¿Bajó la utilidad?

(c) Grafique la nueva restricción presupuestaria y el nuevo óptimo. El efecto total es $\Delta x^{total} = x_1^* - x_0^*$. Calcúlelo e indique su dirección en el gráfico.

4.4.2. Respuesta

Con el nuevo precio:

$$9x + y = 60, \qquad y = 2x.$$

Sustituyendo:

$$9x + 2x = 60 \quad \Rightarrow \quad 11x = 60.$$

Entonces:

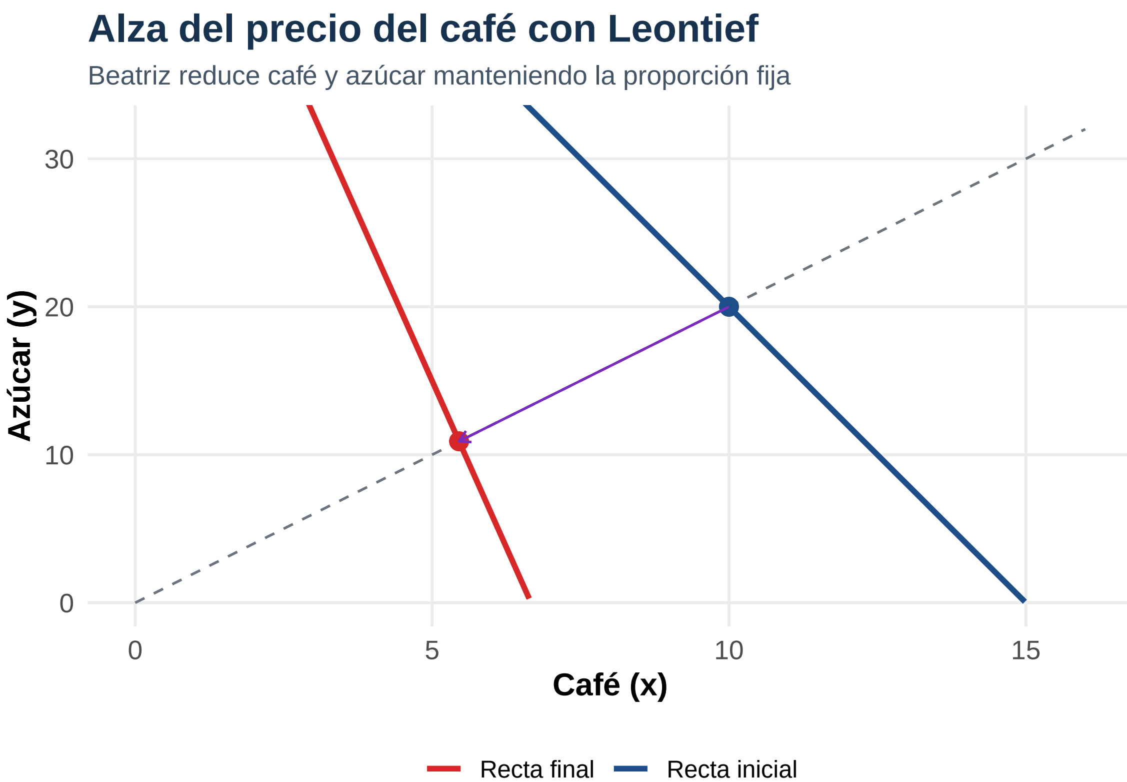
$$x_1^* = \frac{60}{11} \approx 5,45, \qquad y_1^* = \frac{120}{11} \approx 10,91.$$

La utilidad es:

$$U_1^* = x_1^* \approx 5,45.$$

Sí baja, porque el alza del precio del café reduce el número de "paquetes" café-azúcar que Beatriz puede comprar. El efecto total es:

$$\Delta x^{total} = \frac{60}{11} - 10 \approx -4,55.$$



4.5. 4. Descomposición de Slutsky: efecto sustitución nulo

4.5.1. Enunciado

(Descomposición de Slutsky: efecto sustitución nulo.)

(a) Para aislar el efecto sustitución hicksiano, preguntamos: al nuevo precio relativo $p'_x/p_y = 9$, manteniendo la utilidad en U_0^*, ¿cuánto consume Beatriz? El óptimo compensado satisface $U(x^h, y^h) = U_0^*$ y el consumidor sigue en la línea de vértices. Calcule (x^h, y^h).

(b) Compare (x^h, y^h) con (x_0^*, y_0^*). ¿Es $x^h = x_0^*$? ¿Es el efecto sustitución cero?

(c) Explique geométricamente por qué el efecto sustitución es siempre cero con preferencias Leontief: cuando los bienes son complementos perfectos, cambiar el precio relativo no induce sustitución porque el consumidor no puede reemplazar un bien por el otro. ¿Cómo se refleja esto en la forma de la curva de indiferencia?

4.5.2. Respuesta

Para mantener $U_0^* = 10$, Beatriz debe seguir consumiendo el paquete exacto:

$$(x^h, y^h) = (10, 20).$$

Por tanto:

$$x^h = x_0^*.$$

El efecto sustitución es:

$$ES = x^h - x_0^* = 10 - 10 = 0.$$

Geométricamente, aunque cambie la pendiente de la recta compensada, la utilidad fija exige permanecer en el mismo vértice. No existe sustitución entre café y azúcar porque uno no reemplaza al otro.

4.6. 5. Efecto ingreso: todo el ajuste

4.6.1. Enunciado

(Efecto ingreso: todo el ajuste.)

(a) El efecto ingreso es $EI = x_1^* - x^h$. Calcúlelo. ¿Coincide con el efecto total?

(b) Interprete: para Beatriz, el alza del precio del café equivale a una pérdida de ingreso real que la obliga a reducir **ambos** bienes proporcionalmente. No hay ninguna posibilidad de sustituir café por azúcar (o viceversa). ¿Qué tipo de bien es el café para Beatriz en este caso?

(c) Grafique en el plano (x, p_x) la curva de demanda de café de Beatriz. ¿Tiene pendiente negativa? ¿Es más o menos elástica que la demanda Cobb-Douglas del ejercicio anterior?

4.6.2. Respuesta

El efecto ingreso es:

$$EI = x_1^* - x^h = \frac{60}{11} - 10 \approx -4,55.$$

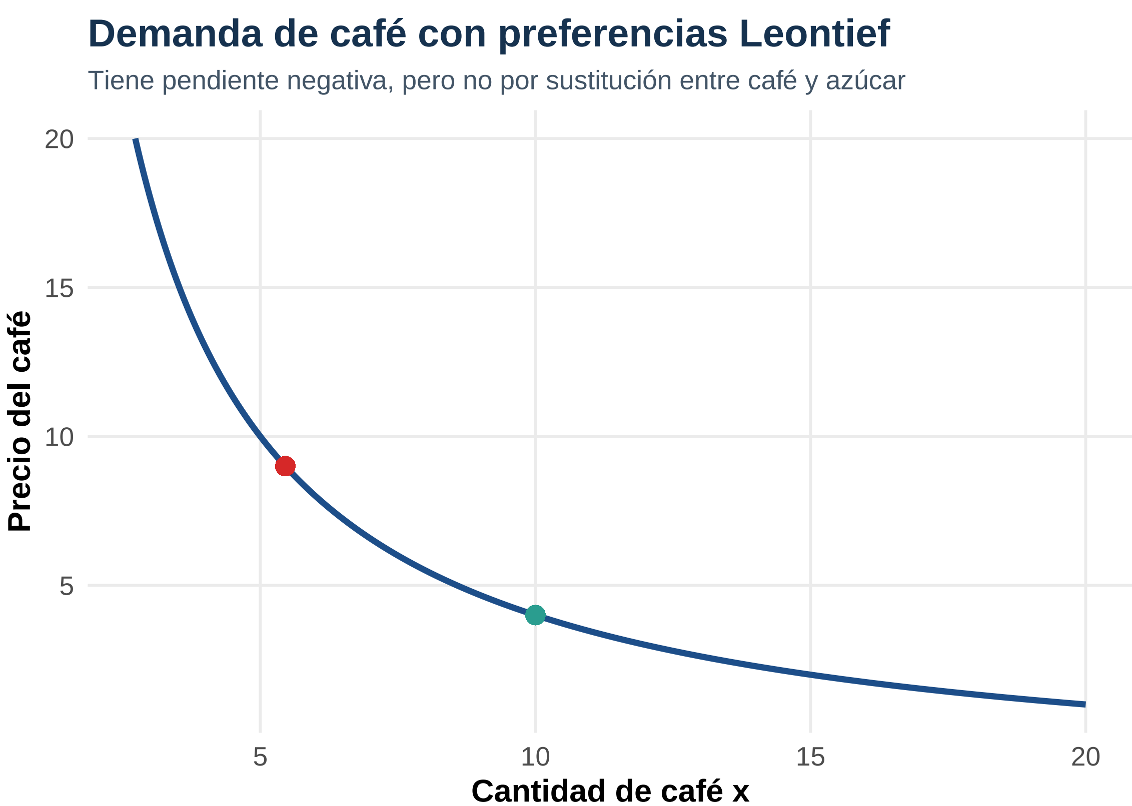
Coincide con el efecto total, porque el efecto sustitución es cero.

El café es un bien normal para Beatriz: al caer su ingreso real, consume menos paquetes café-azúcar y por tanto menos café.

La demanda de café con Leontief es:

$$x^*(p_x) = \frac{60}{p_x + 2p_y} = \frac{60}{p_x + 2}.$$

Tiene pendiente negativa, pero la caída no representa sustitución: representa reducción de paquetes complementarios.



4.7. 6. Comparación y síntesis

4.7.1. Enunciado

(Comparación y síntesis.)

(a) Complete la siguiente tabla con los resultados obtenidos para el caso Leontief (los del caso Cobb-Douglas se completan en el Ejercicio IV):

Concepto	Cobb-Douglas	Leontief
Óptimo inicial x_0^*		
Óptimo final x_1^*		
Efecto total Δx		
Efecto sustitución ES		
Efecto ingreso EI		

(b) ¿En qué difiere cualitativamente la respuesta al alza de precio entre ambos tipos de preferencias?

(c) ¿Qué implicancias tiene para una política de impuesto al café que los consumidores sean Leontief versus Cobb-Douglas?

4.7.2. Respuesta

Tabla 6: Cobb-Douglas versus Leontief

concepto	Cobb-Douglas	Leontief
Óptimo inicial x0*	40.000	10.000
Óptimo final x1*	10.000	5.455
Efecto total	-30.000	-4.545
Efecto sustitución	-14.802	0.000
Efecto ingreso	-15.198	-4.545

La diferencia cualitativa es clara: en Cobb-Douglas hay sustitución e ingreso; en Leontief, toda la respuesta proviene del efecto ingreso. Si un impuesto cae sobre un bien complementario indispensable, los consumidores no sustituyen fácilmente: reducen el paquete completo o soportan la pérdida de bienestar.

5. Parte IV. Matemático III: Sustitutos perfectos

5.1. Contexto

Carlos consume dos marcas de agua mineral, Vital (x) y Cachantun (y). Para él son idénticas: una botella de Vital equivale exactamente a una botella de Cachantun. Sus preferencias son:

$$U(x, y) = x + y.$$

Su ingreso es $m = 60$. Analizaremos tres escenarios de precios y en cada uno identificaremos el óptimo exclusivamente mediante geometría. El análisis es íntegramente geométrico: no se usa cálculo diferencial (las curvas de indiferencia son rectas).

5.2. 1. Geometría de las preferencias: curvas de indiferencia lineales

5.2.1. Enunciado

(Geometría de las preferencias: curvas de indiferencia lineales.)

(a) Despeje y de $U(x, y) = \bar{U}$ para obtener las curvas de indiferencia. ¿Qué forma tienen? ¿Cuál es su pendiente?

(b) Grafique las curvas de indiferencia para $\bar{U} = 10, 20, 30$. ¿Cómo crecen?

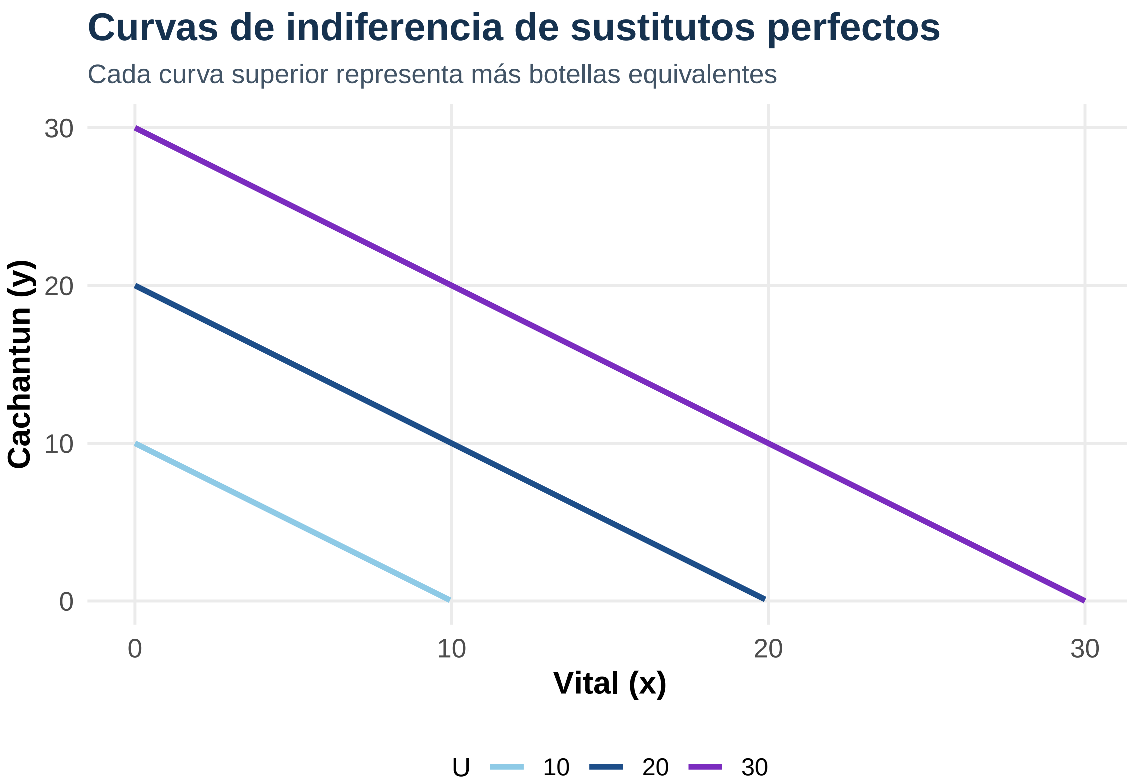
(c) Calcule la TMS. ¿Es constante o variable? ¿Qué implica que sea constante para la disposición de Carlos a sustituir una marca por la otra?

5.2.2. Respuesta

De $U = x + y = \bar{U}$:

$$y = \bar{U} - x.$$

Son rectas con pendiente -1. La TMS es constante e igual a 1. Eso significa que Carlos siempre está dispuesto a cambiar una botella de Vital por una de Cachantun, sin importar cuántas tenga de cada una.



5.3. 2. Escenario A: $p_x < p_y$ — Vital más barata

5.3.1. Enunciado

(Escenario A: $p_x < p_y$ — Vital más barata.) Suponga $p_x = 2$ y $p_y = 3$.

(a) Grafique la restricción presupuestaria $2x + 3y = 60$. ¿Cuál es su pendiente? Compare la pendiente de la restricción presupuestaria (precio relativo) con la pendiente de las curvas de indiferencia (TMS).

(b) ¿En qué dirección se alcanzan niveles de utilidad más altos? ¿La recta presupuestaria y las curvas de indiferencia son paralelas?

(c) Encuentre geométricamente el óptimo. ¿Es una solución interior o de esquina? ¿Consume Carlos algo de Cachantun?

(d) Calcule (x_A^*, y_A^*) y U_A^*.

5.3.2. Respuesta

La restricción es:

$$2x + 3y = 60 \quad \Rightarrow \quad y = 20 - \frac{2}{3}x.$$

Su pendiente es $-2/3$, más plana que las curvas de indiferencia, cuya pendiente es -1. Como Vital es más barata por unidad de utilidad, Carlos compra sólo Vital.

El óptimo es:

$$(x_A^*, y_A^*) = (30, 0), \qquad U_A^* = 30.$$

5.4. 3. Escenario B: $p_x = p_y$ — mismo precio

5.4.1. Enunciado

(Escenario B: $p_x = p_y$ — mismo precio.) Suponga $p_x = p_y = 3$.

(a) Grafique la nueva restricción presupuestaria. Compare su pendiente con la TMS.

(b) ¿Son paralelas la recta presupuestaria y las curvas de indiferencia? ¿Qué ocurre con el óptimo? ¿Hay un único óptimo o infinitos?

(c) Describa el conjunto de óptimos. ¿Qué implica esto sobre el comportamiento de compra de Carlos cuando ambas marcas cuestan igual?

5.4.2. Respuesta

La restricción es:

$$3x + 3y = 60 \quad \Rightarrow \quad x + y = 20.$$

La pendiente es -1, igual a la pendiente de las curvas de indiferencia. Por tanto, la recta presupuestaria completa coincide con una curva de indiferencia. Hay infinitos óptimos:

$$\{(x, y) : x + y = 20,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

Carlos puede comprar cualquier mezcla de ambas marcas: le da exactamente lo mismo.

5.5. 4. Escenario C: $p_x > p_y$ — Vital más cara

5.5.1. Enunciado

(Escenario C: $p_x > p_y$ — Vital más cara.) Suponga $p_x = 4$ y $p_y = 3$.

(a) Repita el análisis geométrico del Escenario A. ¿Cómo cambia el óptimo respecto al Escenario A?

(b) Calcule (x_C^*, y_C^*) y U_C^*.

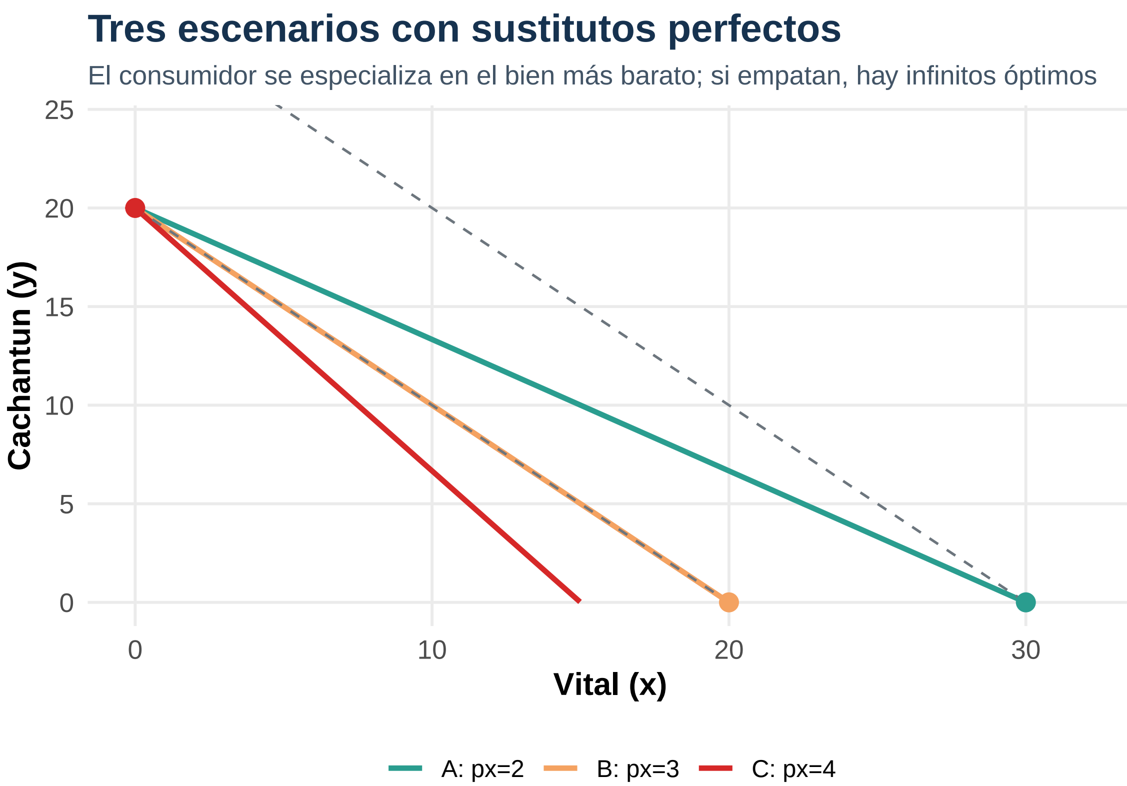
(c) Compare U_A^* con U_C^*: ¿Carlos está mejor en A o en C?

5.5.2. Respuesta

Ahora Vital es más cara que Cachantun. Como ambas entregan la misma utilidad, Carlos compra sólo Cachantun:

$$(x_C^*, y_C^*) = (0, 20), \qquad U_C^* = 20.$$

Carlos está mejor en el escenario A porque puede comprar 30 botellas equivalentes en vez de 20.



5.6. 5. Descomposición de Slutsky: efecto sustitución total

5.6.1. Enunciado

(Descomposición de Slutsky: efecto sustitución total.) Estudie el efecto de la subida del precio de Vital de $p_x = 2$ (Escenario A) a $p_x = 4$ (Escenario C).

(a) El efecto total es $\Delta x^{total} = x_C^* - x_A^*$. Calcúlelo.

(b) Para el efecto sustitución hicksiano: mantenga la utilidad en U_A^* y use el nuevo precio relativo $p'_x/p_y = 4/3 > 1$. Como la TMS $= 1 < p'_x/p_y$, Vital sigue siendo relativamente más cara que la disposición a pagar de Carlos. ¿Cuál es el óptimo compensado (x^h, y^h)?

(c) Compare: ¿el efecto sustitución $ES = x^h - x_A^*$ es igual al efecto total? ¿Es el efecto ingreso $EI = x_C^* - x^h$ cero o no? Explique geométricamente.

(d) Contraste con el caso Leontief: en sustitutos perfectos el efecto sustitución puede ser muy grande (se abandona completamente un bien), mientras que en

Leontief es exactamente cero. ¿Cómo se refleja esta diferencia en la **forma** de las curvas de indiferencia?

5.6.2. Respuesta

El efecto total es:

$$\Delta x^{total} = 0 - 30 = -30.$$

Para mantener $U_A^* = 30$ con el nuevo precio relativo, Carlos compra sólo Cachantun:

$$(x^h, y^h) = (0, 30).$$

Entonces:

$$ES = x^h - x_A^* = 0 - 30 = -30,$$

$$EI = x_C^* - x^h = 0 - 0 = 0.$$

Toda la respuesta viene por sustitución. Es lo contrario de Leontief: allá no se puede sustituir; aquí se sustituye completamente cuando cambia cuál bien es más barato.

5.7. 6. Curva de demanda discontinua

5.7.1. Enunciado

(Curva de demanda discontinua.)

(a) A partir de los tres escenarios, trace la demanda de Vital $x^*(p_x)$ para $p_y = 3$ fijo:

Si $p_x < 3$: $x^* =$ _________ (especializa en x).

Si $p_x = 3$: $x^* \in$ _________ (indiferente).

Si $p_x > 3$: $x^* =$ _________ (especializa en y).

(b) Grafique esta demanda en el plano (x, p_x). ¿Es continua? ¿Qué ocurre en $p_x = p_y = 3$?

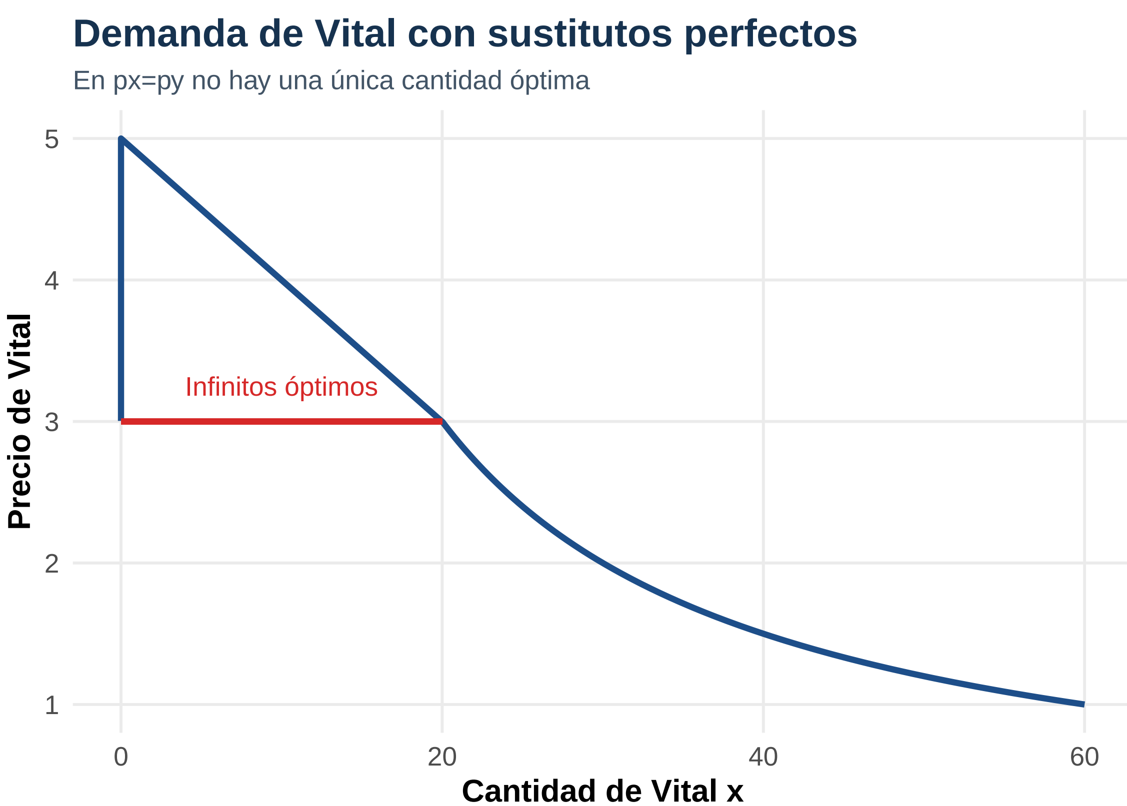
(c) Compare con la curva de demanda Cobb-Douglas (continua y suave) y con la Leontief (continua pero con codo). ¿Qué tipo de demanda es más difícil de modelar empíricamente?

5.7.2. Respuesta

La demanda es:

$$x^*(p_x) = \begin{cases} 60/p_x & \text{si } p_x < 3, \\ [0, 20] & \text{si } p_x = 3, \\ 0 & \text{si } p_x > 3. \end{cases}$$

No es continua en el sentido de tener una única cantidad demandada en $p_x = 3$. En ese precio hay un conjunto entero de óptimos. Eso vuelve más difícil modelar empíricamente la demanda de sustitutos perfectos, porque pequeños cambios de precio pueden provocar saltos grandes en la cantidad comprada.



5.8. 7. Síntesis comparativa de los tres tipos de preferencias

5.8.1. Enunciado

(Síntesis comparativa de los tres tipos de preferencias.) Complete la tabla con los resultados de los tres ejercicios.

Característica	Cobb-Douglas	Leontief	Sust. Perfectos
Forma curva de indiferencia			
TMS (¿constante?)			
Tipo de óptimo			
Efecto sustitución ES			
Efecto ingreso EI			
Forma curva de demanda			
Elasticidad precio (cualitativa)			

(a) Comente brevemente cómo varía la elasticidad precio de la demanda entre los tres casos y qué implica para el impacto de un impuesto al bien x en cada caso.

(b) ¿Qué tipo de preferencias genera mayor pérdida de bienestar (*deadweight loss*) ante un impuesto? ¿Por qué?

5.8.2. Respuesta

Tabla 7: Comparación de preferencias y respuestas de demanda

caracteristica	Cobb-Douglas	Leontief	Sustitutos perfectos
Forma curva de indiferencia	Convexa suave	Forma de L	Rectas
TMS	Decreciente	No definida en vértice	Constante
Tipo de óptimo	Interior por tangencia	Vértice	Esquina o infinitos óptimos
Efecto sustitución ES	Negativo y parcial	Cero	Puede ser total
Efecto ingreso EI	Negativo si x es normal	Todo el ajuste	Puede ser cero
Forma curva de demanda	Continua y suave	Continua, sin sustitución	Discontinua / correspondencia
Elasticidad precio cualitativa	Intermedia; elasticidad unitaria en el caso trabajado	Menor respuesta por sustitución	Muy alta cerca del punto de cambio

La elasticidad precio depende de la posibilidad de sustituir. Con Leontief, la sustitución es nula; un impuesto reduce bienestar principalmente por pérdida de poder adquisitivo. Con Cobb-Douglas, hay sustitución gradual. Con sustitutos perfectos, una pequeña diferencia de precios puede mover todo el consumo a otro bien.

La mayor pérdida de eficiencia ante un impuesto aparece cuando el impuesto distorsiona mucho la conducta y empuja al consumidor a una sustitución fuerte. Por eso, con sustitutos muy cercanos, el impuesto puede generar cambios grandes de composición y pérdida de bienestar, además de baja recaudación si todos migran al sustituto no gravado.

Idea final de la guía: la reacción ante un cambio de precio no depende sólo del precio: depende de la forma de las preferencias. Cobb-Douglas reparte el ajuste, Leontief elimina la sustitución y sustitutos perfectos pueden producir saltos bruscos de demanda.