Guía 4

Propiedad, poder y distribución: Bruno y Ángela

Yerson Olivares Bonilla

2026-04-21

Tabla de contenidos

1. Guía 4

Ramo: Política de las Políticas Públicas / Economía
Estudiante: Yerson Olivares Bonilla
Guía: Guía 4
Fecha: 21-04-2026

Cómo leer esta resolución. En cada ejercicio aparece el **enunciado literal**, luego la **intuición económica**, después el **desarrollo formal paso a paso** y finalmente un **apoyo visual**. Esta guía separa dos preguntas: cuánto excedente se puede generar y cómo las instituciones determinan quién se queda con ese excedente.

2. Parte I. Comentarios conceptuales

2.1. 1. Eficiencia versus distribución

2.1.1. Enunciado

> **(Eficiencia versus distribución: la frontera de Pareto no dice quién gana.)** Cuando Ángela y Bruno alcanzan un acuerdo Pareto-eficiente, el excedente total que generan juntos es máximo: no es posible mejorar a uno sin perjudicar al otro. Sin embargo, existen infinitos acuerdos Pareto-eficientes: algunos favorecen a Ángela, otros a Bruno. Comente: ¿es la eficiencia de Pareto un criterio suficiente para evaluar un acuerdo? ¿Qué dimensión del resultado ignora? ¿Pueden existir acuerdos

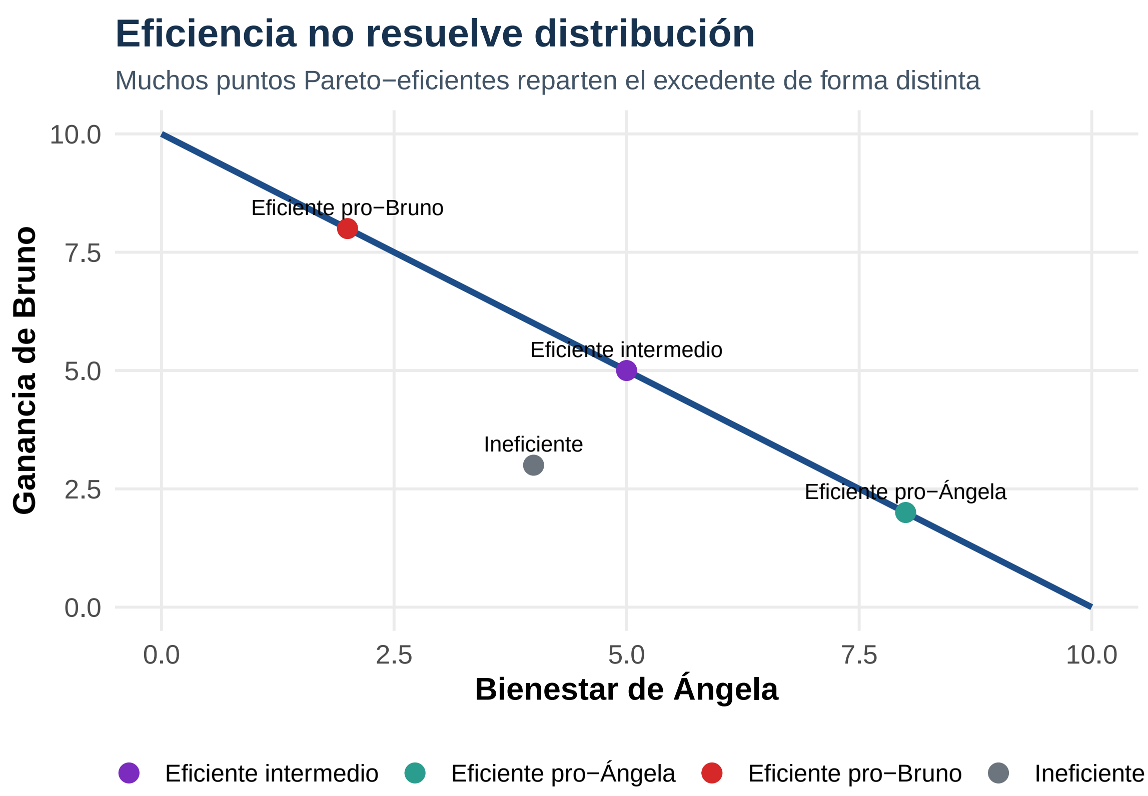
ineficientes que algunos consideren "más justos" que acuerdos eficientes? ¿Cómo se relaciona esto con el debate entre eficiencia y equidad en política pública?

2.1.2. Respuesta

La eficiencia de Pareto no es un criterio suficiente para evaluar un acuerdo. Dice si todavía existen mejoras mutuas posibles, pero no dice **cómo se reparte** el excedente. Dos acuerdos pueden estar ambos sobre la frontera de Pareto y, aun así, uno puede entregar casi todo el excedente a Bruno y otro casi todo a Ángela.

La dimensión que ignora es la **distribución**. Por eso eficiencia y justicia no son lo mismo. Un acuerdo puede ser eficiente y muy desigual; otro puede ser ineficiente pero parecer más justo porque reparte mejor o respeta derechos mínimos.

En política pública esto aparece constantemente. Una reforma puede aumentar el excedente total, pero concentrarlo en un grupo. Otra puede reducir algo de eficiencia estática, pero mejorar equidad, estabilidad social o poder de negociación. La pregunta completa no es sólo "¿se maximiza el excedente?", sino también "¿quién recibe qué y bajo qué reglas?".



2.2. 2. La frontera factible de Ángela

2.2.1. Enunciado

(La frontera factible de Ángela: trabajo, ocio y producción.) Ángela dispone de 24 horas al día que puede dedicar al trabajo (t) o al ocio ($l = 24 - t$). Su producción de grano aumenta con las horas trabajadas, pero con rendimientos marginales decrecientes: $f(t)$ es cóncava. Explique por qué la **frontera factible** de Ángela en el plano (ocio, grano) tiene pendiente negativa y es cóncava hacia el origen. ¿Qué representa el punto de la frontera donde Ángela trabaja 0 horas? ¿Y donde trabaja las 24 horas? ¿Qué mide la pendiente de la frontera en cualquier punto?

2.2.2. Respuesta

La frontera tiene pendiente negativa porque más ocio significa menos trabajo. Si Ángela aumenta l, baja $t = 24 - l$, y por tanto produce menos grano. En el plano ocio-grano, elegir más ocio exige sacrificar producción.

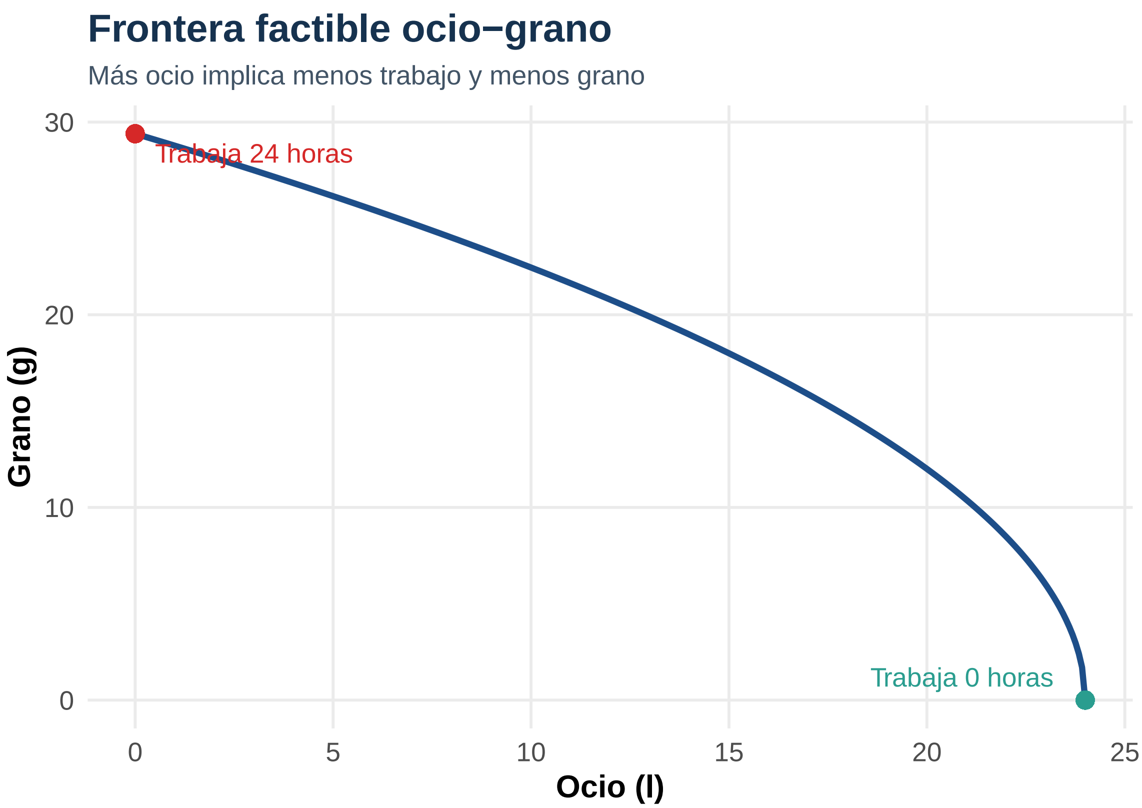
La frontera refleja:

$$g = f(24 - l).$$

Como $f(t)$ tiene rendimientos marginales decrecientes, las primeras horas de trabajo producen mucho y las últimas producen menos. Vista desde el ocio, la pendiente muestra cuánto grano se pierde por una hora adicional de ocio.

- Si trabaja 0 horas, entonces tiene máximo ocio y mínima producción.
- Si trabaja 24 horas, no tiene ocio y alcanza la máxima producción posible.

La pendiente mide el **costo de oportunidad del ocio** en términos de grano.



2.3. 3. La opción de reserva

2.3.1. Enunciado

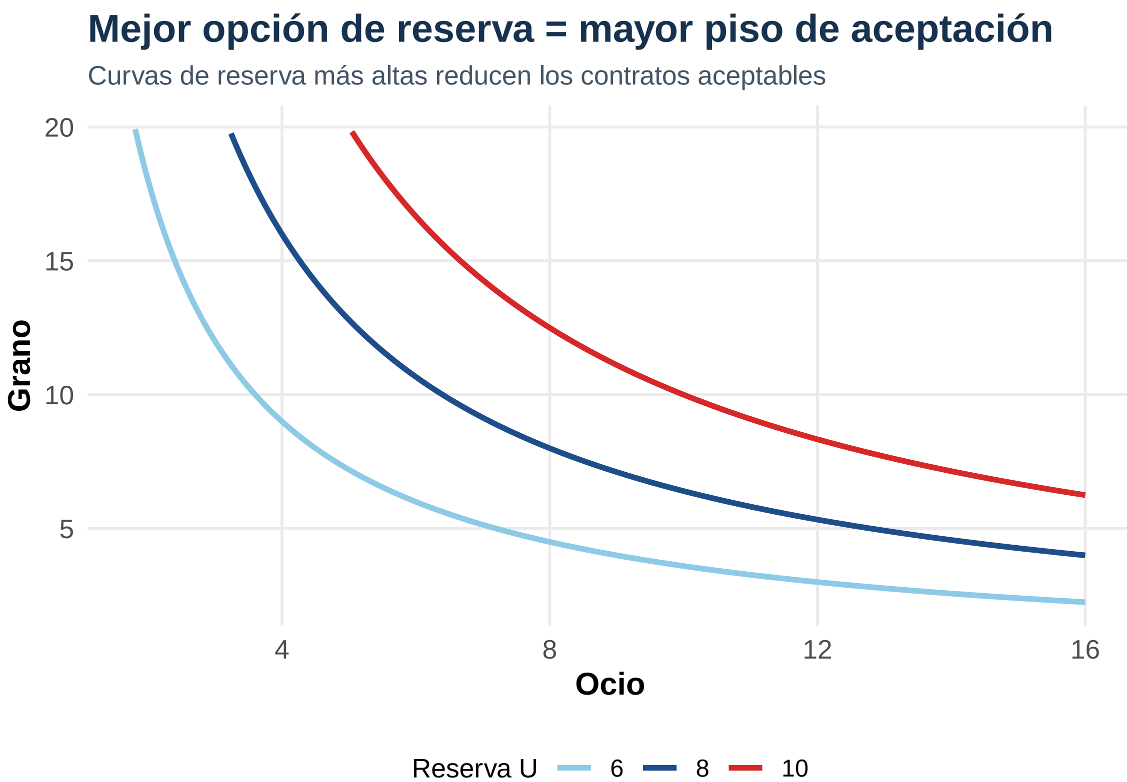
> **(La opción de reserva: el piso del acuerdo.)** La opción de reserva de Ángela es lo que obtiene si no llega a un acuerdo con Bruno: por ejemplo, subsistir con una cantidad mínima de grano $\bar{g}$ que le permite sobrevivir (la restricción biológica), o acceder a oportunidades en otro lugar. Comente: ¿cómo determina la opción de reserva el conjunto de acuerdos que Ángela está dispuesta a aceptar? ¿Qué ocurre con el poder de negociación de Ángela si su opción de reserva mejora (por ejemplo, si la economía crece y hay más oportunidades de empleo)? ¿Y si empeora?

2.3.2. Respuesta

La opción de reserva es el mínimo que Ángela exige para aceptar un acuerdo. Si un contrato le entrega menos utilidad que su alternativa externa, lo rechaza. Por eso define una **restricción de participación**.

Si la opción de reserva mejora, el conjunto de contratos aceptables se reduce: Ángela puede exigir más ocio, más grano o ambas cosas. Su poder de negociación aumenta porque puede decir "no" con menor costo.

Si la opción de reserva empeora, ocurre lo contrario. Ángela acepta contratos peores porque su alternativa externa es más débil. El poder de negociación no depende sólo de preferencias o productividad, sino de las alternativas disponibles.



2.4. 4. Coerción versus intercambio voluntario

2.4.1. Enunciado

> **(Coerción versus intercambio voluntario: la historia institucional.)** En el modelo de Bruno y Ángela, *The Economy* distingue tres etapas institucionales: (i) Bruno puede obligar a Ángela a trabajar bajo amenaza de violencia; (ii) Ángela puede negarse (tiene derecho a rechazar); (iii) existe una ley que limita las horas máximas de trabajo. Describa cómo cambia el resultado en cada etapa. ¿En cuál

etapa el excedente total es máximo? ¿En cuál es más equitativa la distribución? ¿Puede haber una etapa que sea más eficiente pero menos equitativa que otra?

2.4.2. Respuesta

En la etapa de coerción, Bruno puede imponer trabajo y entregar a Ángela sólo lo mínimo necesario. Eso puede generar mucha producción, pero una distribución extremadamente desigual.

Cuando Ángela puede negarse, aparece una restricción de participación. Bruno ya no puede ofrecer cualquier contrato: debe dejarla al menos tan bien como su opción de reserva. Esto mejora la posición distributiva de Ángela y limita la extracción de Bruno.

Con una ley de horas máximas, el Estado reduce el conjunto de contratos posibles. Si la ley impide jornadas excesivas e ineficientes, puede mejorar bienestar y equidad; si es demasiado restrictiva, puede reducir excedente.

Sí puede haber una etapa más eficiente pero menos equitativa que otra. La coerción puede acercarse a máxima producción, pero repartir casi todo a Bruno. La voluntariedad o la ley pueden redistribuir hacia Ángela, incluso si modifican el excedente total.

Tabla 1: Instituciones y poder de negociación

etapa	regla	efecto
Coerción	Bruno impone	Alta extracción de Bruno
Derecho a rechazar	Ángela puede decir no	Sube el piso de Ángela
Ley de jornada máxima	El Estado restringe contratos	Puede redistribuir y/o corregir ineficiencias

2.5. 5. Las curvas de indiferencia de Ángela

2.5.1. Enunciado

(Las curvas de indiferencia de Ángela en el plano ocio–grano.) Ángela prefiere más grano y más ocio. Sus curvas de indiferencia en el plano (ocio l, grano g) tienen pendiente positiva (para obtener la misma utilidad, si tiene menos ocio necesita más grano) y son convexas hacia la esquina inferior izquierda. Explique: ¿por qué la pendiente es positiva y no negativa como en el caso estándar de dos bienes normales? ¿Qué mide esa pendiente (la TMS) en términos económicos? ¿Cómo lucen las curvas de indiferencia en la **restricción biológica** (el nivel mínimo de grano para sobrevivir)?

2.5.2. Respuesta

En el plano ocio-grano, ambos son bienes deseables. Si Ángela pierde ocio, necesita más grano para mantener la misma utilidad. Por eso, cuando se grafica g como compensación por menos l, la curva puede verse con pendiente positiva en la dirección "menos ocio, más grano".

Si se despeja una curva como $g = \bar{U}^2/l$, la pendiente matemática respecto de l es negativa: más ocio permite mantener utilidad con menos grano. Pero la interpretación económica de la TMS es cuánto grano adicional necesita Ángela para aceptar una hora menos de ocio.

En la restricción biológica $g = \bar{g}$, los puntos bajo esa línea no son viables: aunque una curva de indiferencia exista formalmente, Ángela no puede sobrevivir con menos grano que el mínimo.

2.6. 6. Las iso-ganancias de Bruno

2.6.1. Enunciado

> **(Las iso-ganancias de Bruno: líneas de reparto del excedente.)** Bruno se queda con el grano que Ángela produce menos lo que le paga a ella. Si Ángela trabaja t horas y produce $f(t)$ unidades de grano, y Bruno le da g unidades, la ganancia de Bruno es $\pi_B = f(t) - g$. Explique por qué las iso-ganancias de Bruno en el plano (horas de Ángela, grano para Ángela) son líneas rectas paralelas con pendiente igual al producto marginal del trabajo de Ángela. ¿En qué dirección aumenta la ganancia de Bruno? ¿Cómo usa Bruno esas iso-ganancias para elegir el contrato que le ofrece a Ángela?

2.6.2. Respuesta

Para una ganancia fija $\bar{\pi}$:

$$\bar{\pi} = f(t) - g \quad \Rightarrow \quad g = f(t) - \bar{\pi}.$$

En el modelo con producción cóncava, estas iso-ganancias son desplazamientos verticales de la función de producción. Su pendiente en cada punto es el producto marginal:

$$\frac{dg}{dt} = f'(t).$$

Si $f(t)$ fuera lineal, serían rectas paralelas. Con $f(t)$ cóncava, son curvas paralelas en el sentido de que tienen la misma forma y se desplazan verticalmente.

La ganancia de Bruno aumenta cuando g baja: entrega menos grano a Ángela para una misma producción. Bruno elige la iso-ganancia más alta posible que todavía cumpla la restricción de participación de Ángela.

2.7. 7. El contrato "toma o deja"

2.7.1. Enunciado

> **(El contrato "toma o deja": Bruno tiene todo el poder.)** Cuando Bruno tiene todo el poder de negociación (puede hacer una oferta "toma o deja" que Ángela no puede rechazar salvo que prefiera su opción de reserva), Bruno elige el contrato que maximiza su ganancia sujeto a que Ángela acepte. Explique geométricamente cómo encuentra Bruno ese contrato: ¿qué condición de tangencia lo caracteriza? ¿Qué papel juega la curva de indiferencia de reserva de Ángela? ¿Es el resultado eficiente en el sentido de Pareto? ¿Es "justo"?

2.7.2. Respuesta

Bruno busca la mayor iso-ganancia compatible con que Ángela acepte. La curva de indiferencia de reserva de Ángela funciona como frontera mínima: contratos por debajo son rechazados.

Geométricamente, el contrato "toma o deja" está donde una iso-ganancia de Bruno toca la restricción de participación de Ángela. La condición de tangencia iguala el producto marginal del trabajo con la compensación marginal que Ángela exige para trabajar más.

Puede ser Pareto-eficiente si esa tangencia coincide con la frontera eficiente. Pero aunque sea eficiente, no necesariamente es justo: Bruno puede capturar casi todo el excedente, dejando a Ángela sólo en su reserva.

2.8. 8. Excedente conjunto y cómo se reparte

2.8.1. Enunciado

> **(Excedente conjunto y cómo se reparte: el "pastel" y sus rebanadas.)** El excedente total de la relación entre Ángela y Bruno es la diferencia entre el valor de lo que producen juntos y lo que cada uno obtendría por separado (sus opciones de reserva). Comente: ¿por qué ambos están dispuestos a llegar a un acuerdo siempre que el excedente conjunto sea positivo? ¿Es el tamaño del pastel (eficiencia) independiente de cómo se reparte (distribución)? ¿En qué circunstancias la forma de repartir puede afectar el tamaño del pastel?

2.8.2. Respuesta

Si el excedente conjunto es positivo, existe al menos un reparto que deja a ambas partes mejor que sus opciones externas. Por eso hay espacio para contratar.

En principio, eficiencia y distribución pueden separarse: primero se elige el punto que maximiza el pastel y luego se reparte. Pero en la práctica la distribución puede afectar el tamaño del pastel. Si una parte queda muy mal remunerada, puede trabajar con menos esfuerzo, invertir menos, resistir el contrato o no participar. También puede haber conflictos, costos de supervisión o pérdida de confianza.

Por eso las instituciones distributivas también pueden ser productivas: no sólo reparten, sino que afectan incentivos y cooperación.

2.9. 9. La legislación como cambio de la opción de reserva

2.9.1. Enunciado

> **(La legislación como cambio de la opción de reserva.)** Un parlamento aprueba una ley que fija un máximo de $\bar{t}$ horas de trabajo semanales. Comente cómo cambia el conjunto de acuerdos factibles para Bruno y Ángela. ¿Puede la ley mejorar el bienestar de Ángela sin reducir el excedente total? ¿Puede mejorar ambos? ¿Bajo qué condiciones la legislación mueve el acuerdo a un punto Pareto-superior respecto al contrato "toma o deja" de Bruno? Dibuje esquemáticamente el efecto en el plano (ocio, grano).

2.9.2. Respuesta

Una ley de jornada máxima elimina contratos con $t > \bar{t}$. Eso reduce el conjunto de opciones de Bruno, pero puede mejorar la posición de Ángela si antes Bruno elegía una jornada excesiva.

La ley puede mejorar a Ángela sin reducir excedente si el contrato previo era ineficiente y la restricción empuja hacia un punto más cercano a la frontera de Pareto. Incluso puede mejorar a ambos si reduce una distorsión: menos horas, mayor productividad marginal, más bienestar para Ángela y ganancia no menor para Bruno.

Si el contrato "toma o deja" ya era eficiente, la ley sólo redistribuye o restringe. Si era ineficiente, la ley puede generar una mejora Pareto-superior.

2.10. 10. Instituciones, poder e historia

2.10.1. Enunciado

(Instituciones, poder e historia: más allá de Bruno y Ángela.) El modelo de Bruno y Ángela es una metáfora de muchas relaciones económicas: empleador–trabajador, banco–deudor, Estado–ciudadano. En todas ellas, las instituciones (contratos, leyes, sindicatos, regulación) determinan quién tiene poder de proponer, quién tiene poder de rechazar y cuál es la opción de reserva de cada parte. Elija una relación económica real de la economía chilena (por ejemplo, empleado doméstico y empleador, arrendatario y dueño, trabajador a plazo fijo y empresa) y analice: ¿cuál es la opción de reserva de cada parte?, ¿quién tiene más poder de negociación?, ¿cómo han cambiado las instituciones en los últimos 30 años y qué efecto ha tenido sobre la distribución del excedente?

2.10.2. Respuesta

Un ejemplo claro es la relación entre trabajador a plazo fijo y empresa. La opción de reserva del trabajador depende de su probabilidad de encontrar otro empleo, ahorros, redes familiares, seguro de cesantía y nivel de desempleo. La opción de reserva de la empresa depende de qué tan fácil sea reemplazarlo o automatizar la tarea.

Cuando el desempleo es alto, la opción de reserva del trabajador empeora y la empresa tiene más poder. Cuando hay sindicatos, negociación colectiva, salario mínimo, fiscalización laboral o alta demanda por trabajadores, la opción de reserva del trabajador mejora.

En Chile, durante las últimas décadas han cambiado instituciones como salario mínimo, seguro de cesantía, regulación de subcontratación, normas de jornada, sindicalización y protección ante despidos. Estos cambios no eliminan la desigualdad de poder, pero alteran la distribución del excedente: una parte mayor puede ir a salarios, estabilidad o mejores condiciones laborales.

Tabla 2: Ejemplo chileno: trabajador a plazo fijo y empresa

relación	opción de reserva	factores que aumentan poder	resultado distributivo
Trabajador a plazo fijo	Otro empleo, seguro de cesantía, ahorros	Bajo desempleo, sindicatos, regulación	Mejores salarios/condiciones si reserva mejora
Empresa	Contratar reemplazo, automatizar, reorganizar	Alto desempleo, baja fiscalización, reemplazabilidad	Mayor captura de excedente si reserva del trabajador empeora

3. Parte II. Matemático I: La frontera factible y el óptimo de Ángela

3.1. Contexto

Ángela dispone de 16 horas diarias (el resto duerme) que puede dedicar al trabajo (t) o al ocio (l), con $l + t = 16$. Su producción de grano es:

$$f(t) = 4\sqrt{t}, \qquad t \in [0, 16].$$

Sus preferencias sobre ocio y grano se representan mediante:

$$U(l, g) = l^{1/2} g^{1/2},$$

donde g es el grano que Ángela consume. La restricción biológica es $g \geq \bar{g} = 4$ (necesita al menos 4 unidades de grano para sobrevivir). En este ejercicio Ángela toma sus propias decisiones: produce, consume todo lo que produce y elige (l^*, g^*) para maximizar su utilidad.

3.2. 1. La frontera factible en el plano ocio-grano

3.2.1. Enunciado

(La frontera factible en el plano ocio–grano.)

(a) Usando $t = 16 - l$ y $g = f(t)$, exprese la producción de grano como función del ocio:

$$g = 4\sqrt{16 - l}, \qquad l \in [0, 16].$$

Grafique esta frontera en el plano (l, g), con el ocio en el eje horizontal y el grano en el eje vertical. Calcule los puntos extremos: (l, g) cuando $t = 0$ y cuando $t = 16$.

(b) ¿Tiene pendiente positiva o negativa la frontera? Calcule dg/dl e interprete: ¿cuánto grano pierde Ángela por cada hora adicional de ocio que se toma? ¿Es esta pendiente constante o varía con l? ¿Por qué?

(c) ¿Es la frontera cóncava o convexa hacia el origen? Relacione la concavidad con el supuesto de producto marginal decreciente del trabajo.

(d) Marque en el gráfico la restricción biológica $g = 4$. ¿Cuántas horas máximas de ocio le permite esta restricción a Ángela?

3.2.2. Respuesta

Como $t = 16 - l$:

$$g = 4\sqrt{16 - l}.$$

Los extremos son:

- si $t = 0$, entonces $l = 16$ y $g = 0$;
- si $t = 16$, entonces $l = 0$ y $g = 16$.

La pendiente es:

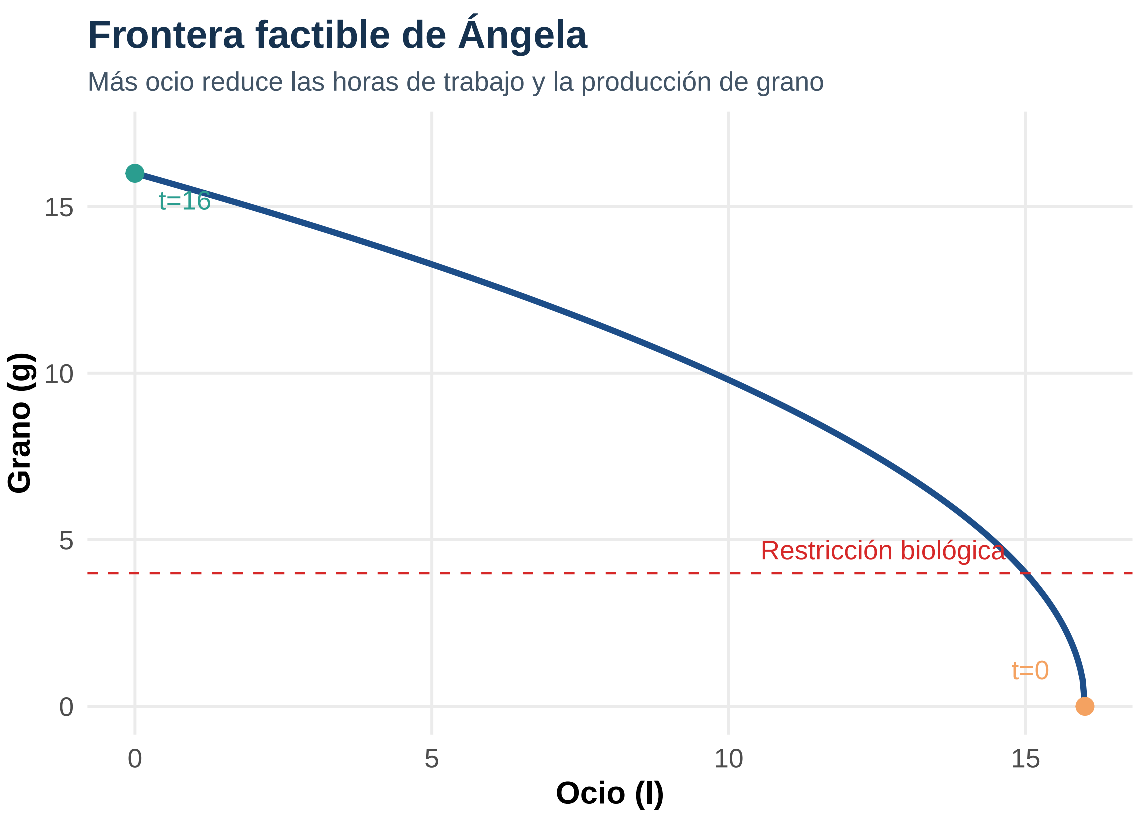
$$\frac{dg}{dl} = 4 \cdot \frac{1}{2}(16-l)^{-1/2}(-1) = -\frac{2}{\sqrt{16-l}}.$$

Es negativa: más ocio implica menos trabajo y menos grano. Además su valor absoluto aumenta cuando l sube, porque queda menos trabajo y cada hora adicional de ocio sacrifica producción relativamente valiosa.

La frontera es cóncava desde la perspectiva productiva: la producción $f(t) = 4\sqrt{t}$ tiene producto marginal decreciente. La restricción biológica exige:

$$4\sqrt{16-l} \geq 4 \quad \Rightarrow \quad 16-l \geq 1 \quad \Rightarrow \quad l \leq 15.$$

Ángela puede tomar como máximo 15 horas de ocio si quiere sobrevivir.



3.3. 2. Curvas de indiferencia de Ángela

3.3.1. Enunciado

(Curvas de indiferencia de Ángela.)

(a) Despeje g de $U(l,g) = \bar{U}$ para obtener la ecuación de una curva de indiferencia genérica:

$$g = \frac{\bar{U}^2}{l}.$$

Grafique tres curvas de indiferencia ($\bar{U} = 4, 6, 8$) en el mismo plano que la frontera factible.

(b) Calcule la TMS de Ángela:

$$\mathrm{TMS} = -\left.\frac{dg}{dl}\right|_{\bar{U}} = \frac{g}{l}.$$

Interprete: ¿qué mide esta TMS en el contexto de ocio y grano? ¿Es decreciente en l? ¿Qué implica eso?

(c) ¿Hay curvas de indiferencia que quedan completamente por debajo de la restricción biológica? ¿Qué significa eso?

3.3.2. Respuesta

De:

$$U(l,g) = l^{1/2} g^{1/2} = \bar{U},$$

se obtiene:

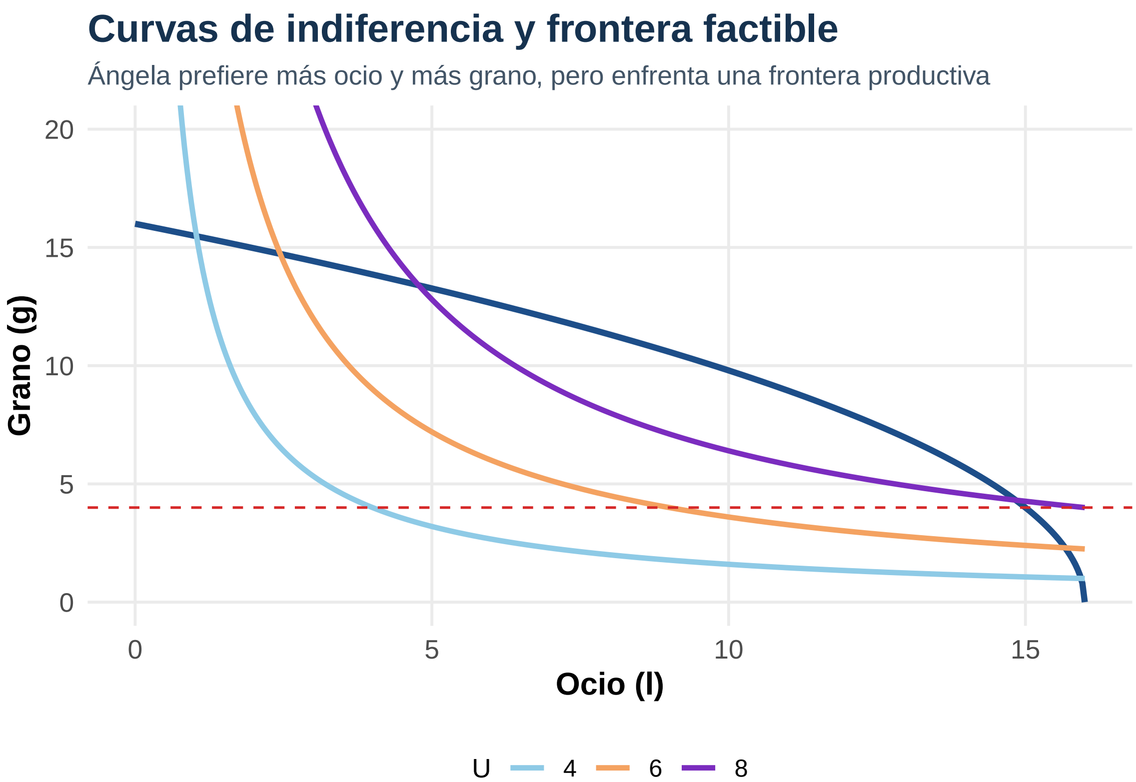
$$lg = \bar{U}^2 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{\bar{U}^2}{l}.$$

La TMS es:

$$\mathrm{TMS} = \frac{g}{l}.$$

Mide cuántas unidades de grano necesita Ángela para compensar la pérdida de una unidad de ocio, manteniendo utilidad constante. Es decreciente en l: mientras más ocio tiene, menos valiosa es una hora adicional de ocio en relación con el grano.

Las curvas que quedan bajo $g = 4$ representan niveles de consumo incompatibles con la supervivencia. Formalmente pueden existir, pero no son opciones viables si Ángela necesita al menos 4 unidades de grano.



3.4. 3. Óptimo autónomo de Ángela

3.4.1. Enunciado

(Óptimo autónomo de Ángela.) El óptimo de Ángela es el punto de la frontera factible tangente a la curva de indiferencia más alta.

(a) Escriba la condición de tangencia: la TMS de Ángela debe igualar la pendiente (en valor absoluto) de la frontera factible.

Hint: La pendiente de la frontera es $|dg/dl| = 2/\sqrt{16-l}$.

(b) Usando la condición de tangencia y la ecuación de la frontera $g = 4\sqrt{16-l}$, encuentre el óptimo (l^*, g^*).

(c) Calcule $U^* = U(l^*, g^*)$ y señale el óptimo en el gráfico. ¿Se cumple la restricción biológica $g^* \geq 4$?

(d) ¿Cuántas horas trabaja Ángela en el óptimo? ¿Es intuitivo ese número dado sus preferencias?

3.4.2. Respuesta

La condición de tangencia es:

$$\frac{g}{l} = \frac{2}{\sqrt{16-l}}.$$

Usando la frontera:

$$g = 4\sqrt{16-l}.$$

Sustituyendo:

$$\frac{4\sqrt{16-l}}{l} = \frac{2}{\sqrt{16-l}}.$$

Multiplicando:

$$4(16-l) = 2l.$$

Entonces:

$$64 - 4l = 2l \quad \Rightarrow \quad l^* = \frac{32}{3} \approx 10,67.$$

Las horas trabajadas son:

$$t^* = 16 - l^* = \frac{16}{3} \approx 5,33.$$

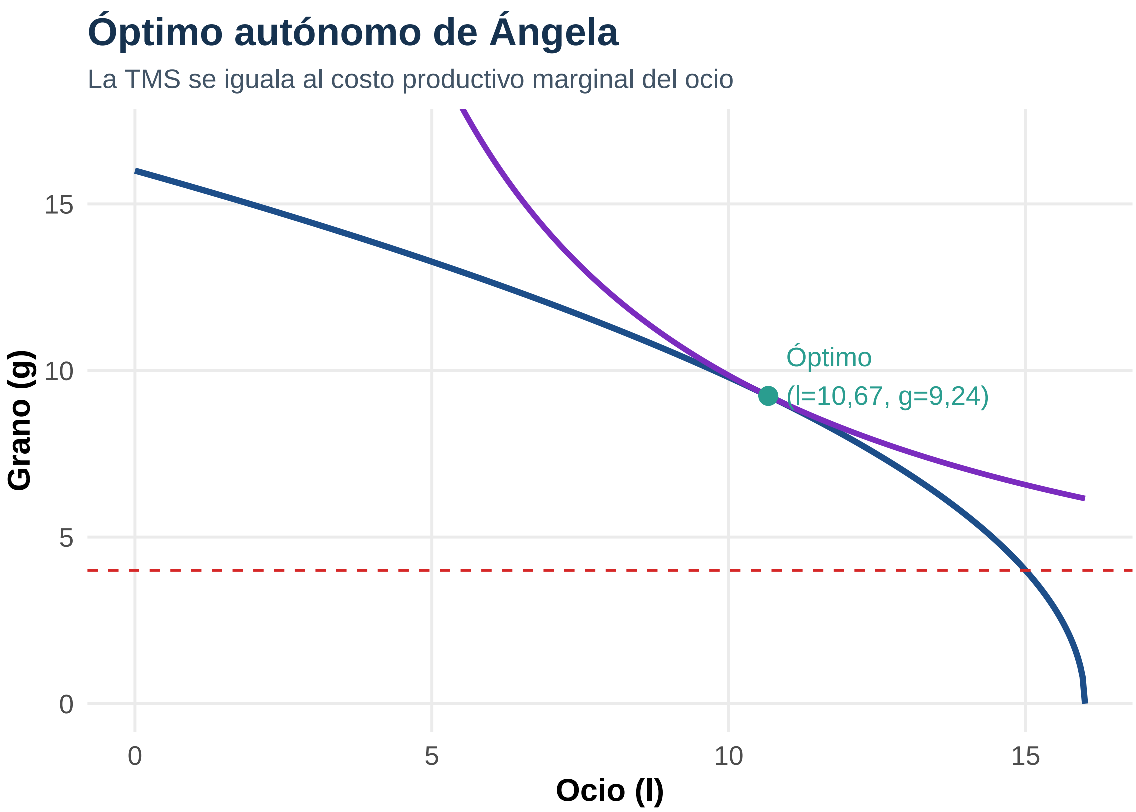
El grano producido y consumido es:

$$g^* = 4\sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}} \approx 9,24.$$

La utilidad es:

$$U^* = \sqrt{l^* g^*} \approx 9,93.$$

La restricción biológica se cumple porque $g^* > 4$. Es intuitivo: Ángela trabaja una parte del día para producir grano, pero reserva una cantidad importante de tiempo para ocio porque también lo valora.



3.5. 4. La opción de reserva de Ángela

3.5.1. Enunciado

(La opción de reserva de Ángela.)

(a) La opción de reserva de Ángela es la curva de indiferencia que pasa por el punto (l^*, g^*) del óptimo autónomo (lo que obtiene si no hay acuerdo con Bruno). ¿Cuál es el valor $\bar{U} = U^*$ de esa curva?

(b) Grafique la curva de indiferencia de reserva y sombree el conjunto de cestas (l, g) que Ángela **prefiere** a su opción de reserva. Este conjunto delimita los contratos que Ángela aceptaría.

(c) Si la opción de reserva de Ángela mejora —por ejemplo, $\bar{U}$ sube de U^* a $U^* + 2$— ¿cómo cambia el conjunto de contratos aceptables? ¿Gana o pierde poder de negociación?

3.5.2. Respuesta

La utilidad de reserva es:

$$\bar{U} = U^* \approx 9,93.$$

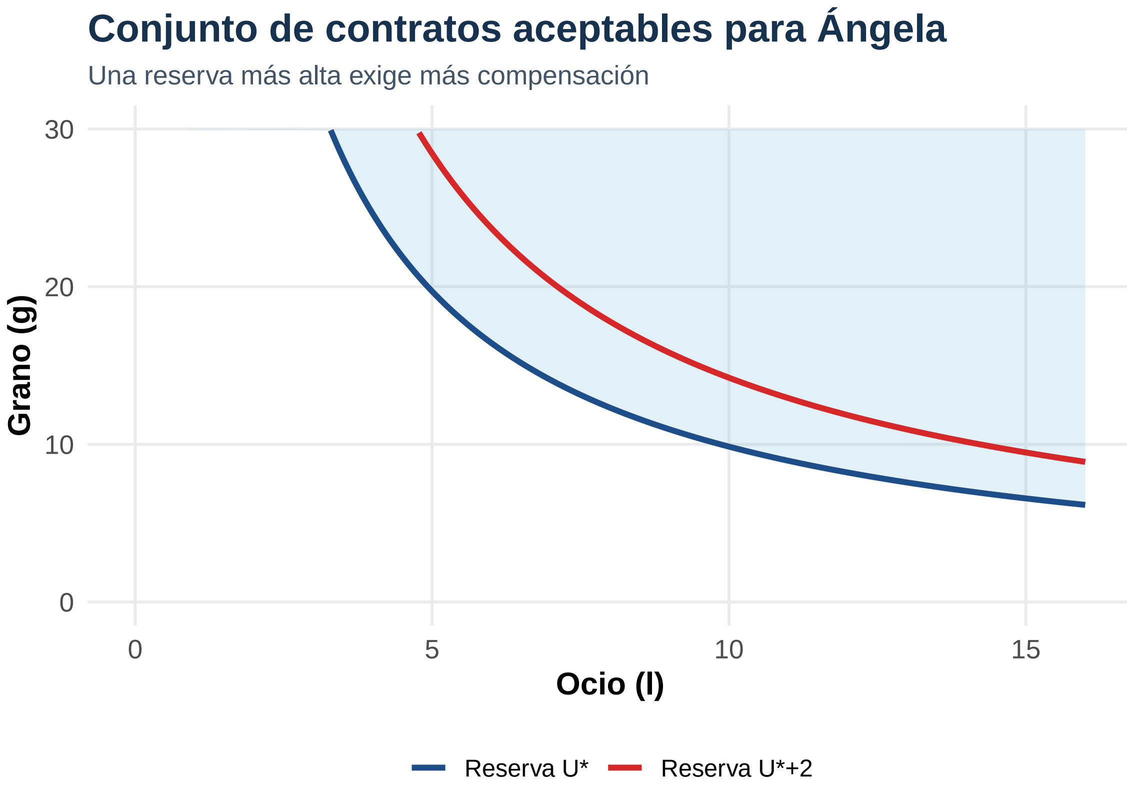
Los contratos aceptables son los que cumplen:

$$U(l, g) \geq \bar{U}.$$

Equivalente a:

$$g \geq \frac{\bar{U}^2}{l}.$$

Si la opción de reserva sube a $U^* + 2$, la curva de reserva se desplaza hacia arriba. Eso reduce el conjunto de contratos aceptables y aumenta el poder de negociación de Ángela: Bruno debe ofrecer más grano o más ocio para que acepte.



4. Parte III. Matemático II: Bruno maximiza su ganancia

4.1. Contexto

Bruno es dueño de la tierra y tiene todo el poder de negociación: hace una oferta "toma o deja" a Ángela. Si Ángela trabaja t horas y produce $g_P = 4\sqrt{t}$ unidades de grano, Bruno le da g unidades y se queda con el resto:

$$\pi_B = 4\sqrt{t} - g = f(t) - g.$$

Ángela acepta si y sólo si el contrato (t, g) le da al menos su utilidad de reserva:

$$U(l, g) = (16 - t)^{1/2} g^{1/2} \geq \bar{U},$$

donde usamos el óptimo autónomo del ejercicio anterior como opción de reserva. Todos los parámetros son los mismos que en el Ejercicio I: $f(t) = 4\sqrt{t}$, $U(l,g) = l^{1/2}g^{1/2}$, $\bar{U} = U^*$ calculado allí.

4.2. 1. Las iso-ganancias de Bruno

4.2.1. Enunciado

(Las iso-ganancias de Bruno.)

(a) Para un nivel de ganancia fijo $\bar{\pi}$, despeje g en función de t a lo largo de una iso-ganancia de Bruno:

$$g = 4\sqrt{t} - \bar{\pi}.$$

¿Qué forma tiene esta curva en el plano (t, g)? ¿Cuál es su pendiente?

(b) Grafique tres iso-ganancias ($\bar{\pi} = 0, 2, 4$) en el plano (t, g), con $t \in [0, 16]$. ¿En qué dirección aumenta la ganancia de Bruno? ¿Cuál iso-ganancia corresponde a $\pi_B = 0$ (Bruno no gana nada)?

(c) Interprete la pendiente de la iso-ganancia: si Ángela trabaja una hora más, ¿en cuánto aumenta la producción? ¿Cuánto puede aumentar g y mantener constante π_B? ¿Es esta pendiente creciente o decreciente en t?

4.2.2. Respuesta

Para una ganancia fija:

$$\bar{\pi} = 4\sqrt{t} - g.$$

Despejando:

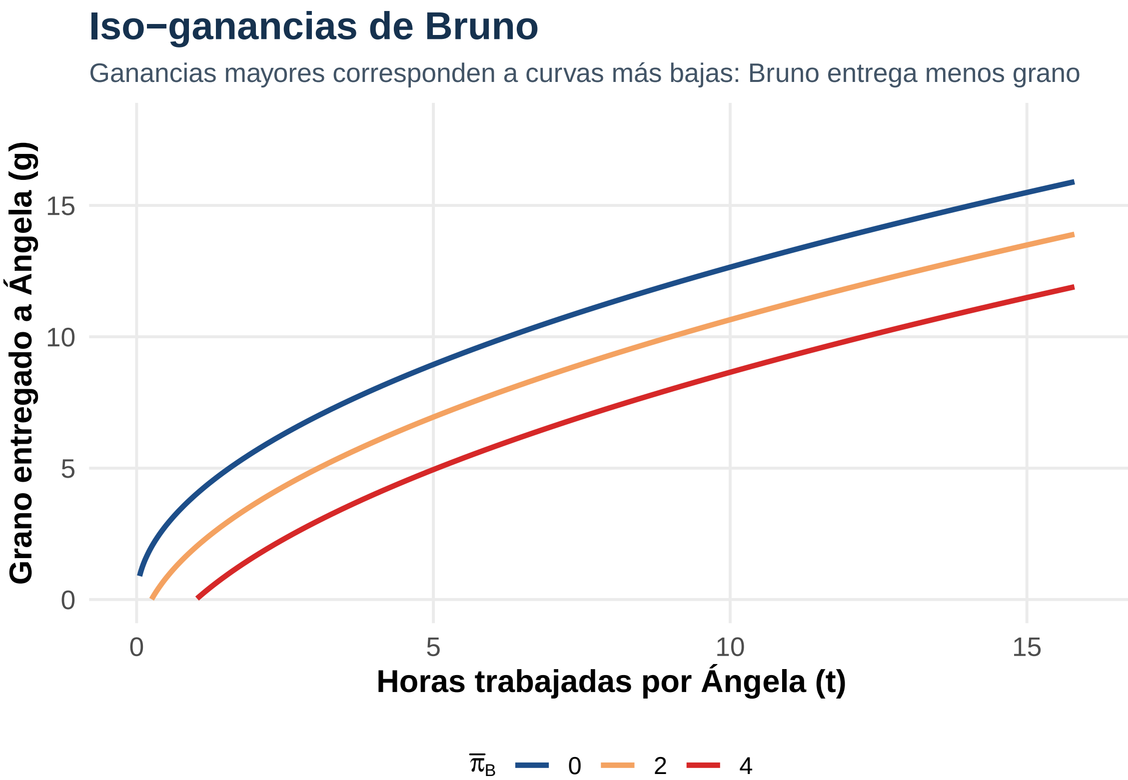
$$g = 4\sqrt{t} - \bar{\pi}.$$

La pendiente es:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{2}{\sqrt{t}}.$$

Esta pendiente es decreciente en t: las primeras horas de trabajo elevan mucho la producción; las horas posteriores elevan menos.

La ganancia de Bruno aumenta cuando la curva se desplaza hacia abajo, porque para cada t entrega menos grano a Ángela. La iso-ganancia $\pi_B = 0$ es $g = 4\sqrt{t}$: todo lo producido va a Ángela.



4.3. 2. La restricción de participación de Ángela

4.3.1. Enunciado

(La restricción de participación de Ángela.)

(a) La restricción de participación exige que $(16-t)^{1/2}g^{1/2} = \bar{U}$. Despeje g como función de t a lo largo de esta restricción:

$$g^{RP}(t) = \frac{\bar{U}^2}{16 - t}.$$

Grafique $g^{RP}(t)$ para $t \in [0, 15]$ en el mismo plano que las iso-ganancias.

(b) Interprete: los contratos sobre la curva $g^{RP}(t)$ dejan a Ángela exactamente en su utilidad de reserva. Los contratos **por encima** de la curva la hacen mejor; los de **abajo** son inaceptables para Ángela.

(c) ¿Tiene g^{RP} pendiente positiva o negativa? ¿Por qué: si Bruno le exige más horas a Ángela (menos ocio), debe compensarla con más grano para que ella siga aceptando?

4.3.2. Respuesta

La restricción de participación es:

$$(16 - t)^{1/2} g^{1/2} = \bar{U}.$$

Elevando al cuadrado:

$$(16 - t)g = \bar{U}^2.$$

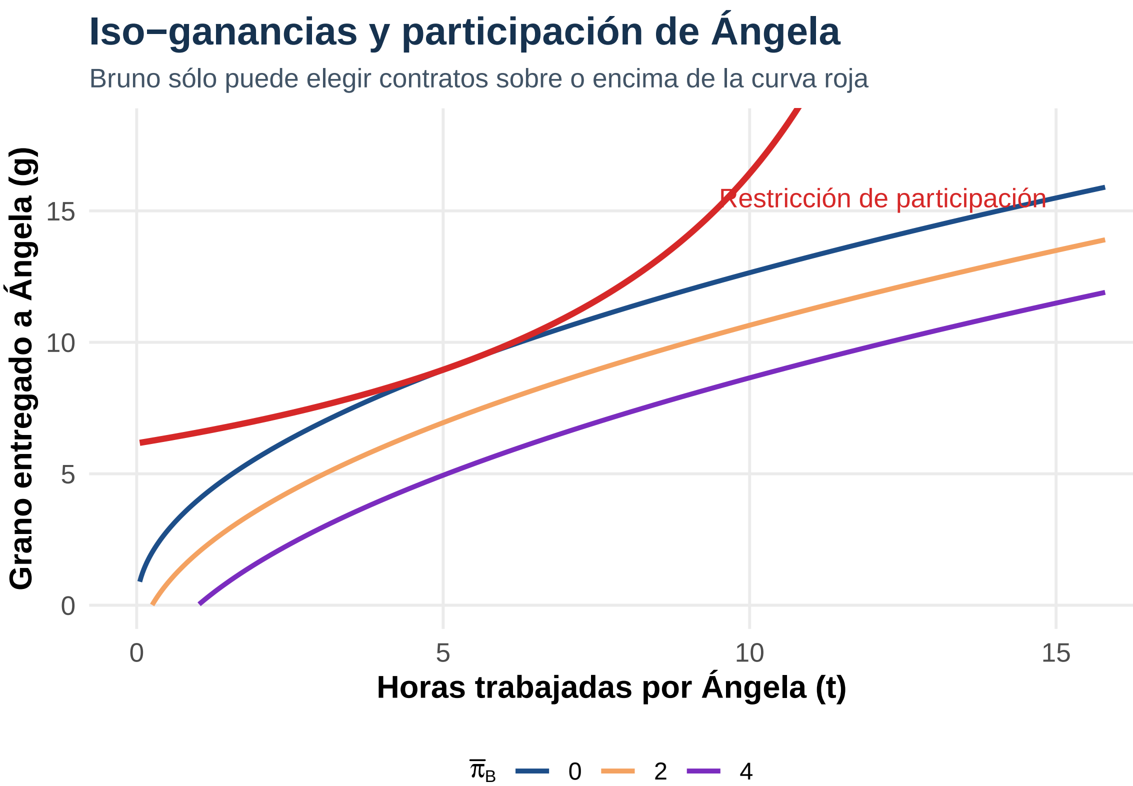
Despejando:

$$g^{RP}(t) = \frac{\bar{U}^2}{16 - t}.$$

Tiene pendiente positiva:

$$\frac{dg^{RP}}{dt} = \frac{\bar{U}^2}{(16 - t)^2} > 0.$$

Si Bruno exige más horas de trabajo, Ángela pierde ocio. Para mantenerla en la misma utilidad de reserva, debe recibir más grano.



4.4. 3. El contrato óptimo de Bruno

4.4.1. Enunciado

(El contrato óptimo de Bruno: tangencia entre iso-ganancia y restricción de participación.) Bruno maximiza $\pi_B = f(t) - g$ sujeto a $g \geq g^{RP}(t)$. En el óptimo, la restricción se cumple con igualdad: $g = g^{RP}(t)$.

(a) Sustituyendo $g = g^{RP}(t)$ en π_B, exprese la ganancia de Bruno como función de t exclusivamente:

$$\pi_B(t) = 4\sqrt{t} - \frac{\bar{U}^2}{16 - t}.$$

(b) Derive la condición de primer orden $d\pi_B/dt = 0$ e interprete: ¿qué igualdad entre el producto marginal del trabajo y el costo marginal (en términos de compensación a Ángela) caracteriza el óptimo de Bruno?

(c) Usando el valor de $\bar{U} = U^*$ calculado en el Ejercicio I, resuelva numéricamente para t_B^* y calcule $g_B^* = g^{RP}(t_B^*)$ y π_B^*.

Hint: La condición de primer orden resulta en $2/\sqrt{t} = \bar{U}^2/(16-t)^2$. Sustituya $\bar{U}^2$ numéricamente y resuelva.

(d) Calcule la utilidad de Ángela en el contrato de Bruno: $U^{Bruno} = U(16 - t_B^*, g_B^*)$. ¿Es igual a $\bar{U}$? ¿Era de esperarse?

4.4.2. Respuesta

La ganancia de Bruno, imponiendo participación con igualdad, es:

$$\pi_B(t) = 4\sqrt{t} - \frac{\bar{U}^2}{16-t}.$$

La derivada es:

$$\frac{d\pi_B}{dt} = \frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{\bar{U}^2}{(16-t)^2}.$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{2}{\sqrt{t}} = \frac{\bar{U}^2}{(16-t)^2}.$$

El lado izquierdo es el producto marginal del trabajo. El lado derecho es la compensación marginal adicional que Bruno debe pagar a Ángela para que acepte trabajar más horas.

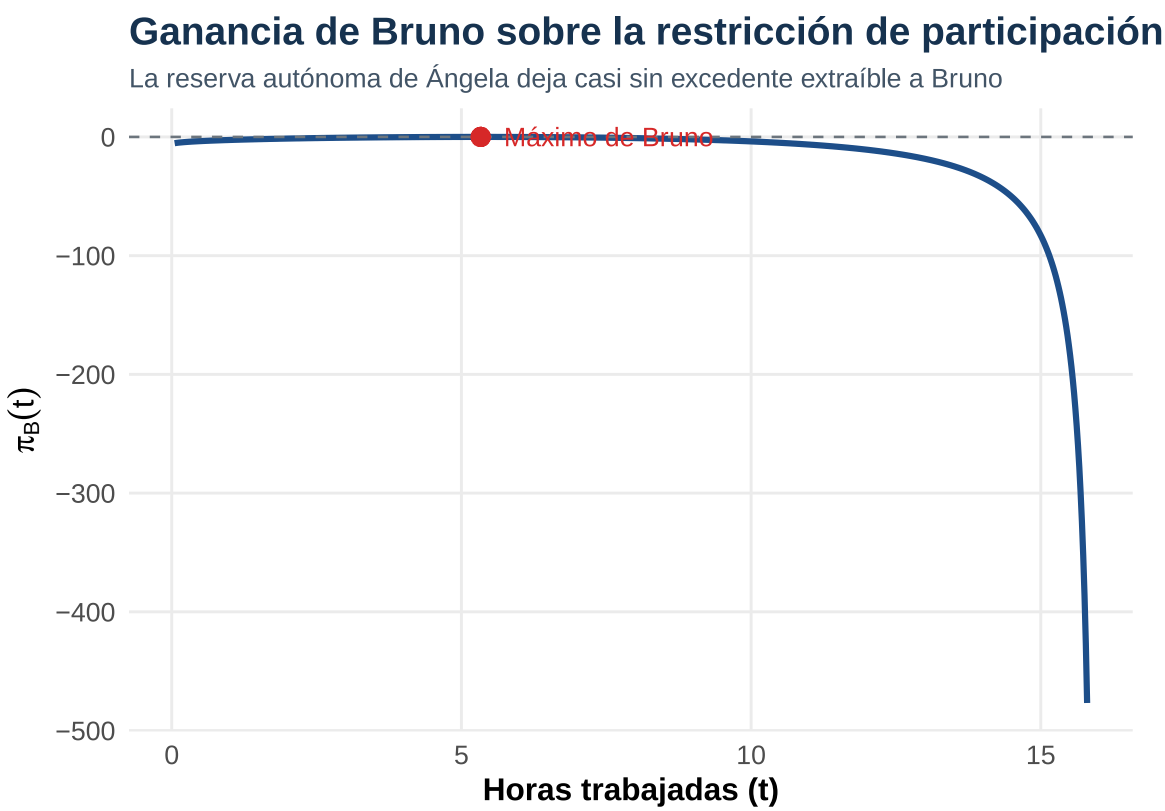
Con los valores del Ejercicio I:

$$t_B^* \approx 5{,}33, \qquad g_B^* \approx 9{,}24, \qquad \pi_B^* \approx -0{,}0000.$$

Además:

$$U^{Bruno} \approx 9{,}93 = \bar{U}.$$

Era esperable: Bruno tiene todo el poder y por eso deja a Ángela exactamente en su utilidad de reserva. En esta parametrización, esa reserva es tan alta que la ganancia máxima de Bruno es prácticamente cero.



4.5. 4. ¿Es el contrato de Bruno Pareto-eficiente?

4.5.1. Enunciado

(¿Es el contrato de Bruno Pareto-eficiente?)

(a) En el óptimo de Bruno, ¿se cumple que la TMS de Ángela es igual a la pendiente de la frontera factible (producto marginal del trabajo)? Verifique numéricamente.

(b) Si TMS $\neq |dg/dl|$ en el contrato de Bruno, existe potencial de mejora mutua: hay contratos que beneficiarían a ambos. ¿En qué dirección habría que mover el contrato para alcanzar la eficiencia?

(c) Encuentre el contrato Pareto-eficiente (t^{**}, g^{**}) que maximiza la utilidad de Ángela sujeto a que la ganancia de Bruno sea al menos π_B^* (es decir, Bruno no queda peor que en su contrato "toma o deja").

Hint: En el óptimo Pareto-eficiente, TMS de Ángela = producto marginal del trabajo de Ángela. Use la misma condición de tangencia del Ejercicio I, pero ahora con la restricción de que Bruno obtiene π_B^*.

(d) Compare (t^{**}, g^{**}) con (t_B^*, g_B^*). ¿Trabaja Ángela más o menos horas en el contrato eficiente? ¿Recibe más o menos grano? Represente ambos contratos en el gráfico.

4.5.2. Respuesta

En términos de t, Ángela tiene ocio $l = 16 - t$. Su TMS entre ocio y grano es:

$$\text{TMS} = \frac{g}{l} = \frac{g}{16 - t}.$$

El producto marginal del trabajo es:

$$f'(t) = \frac{2}{\sqrt{t}}.$$

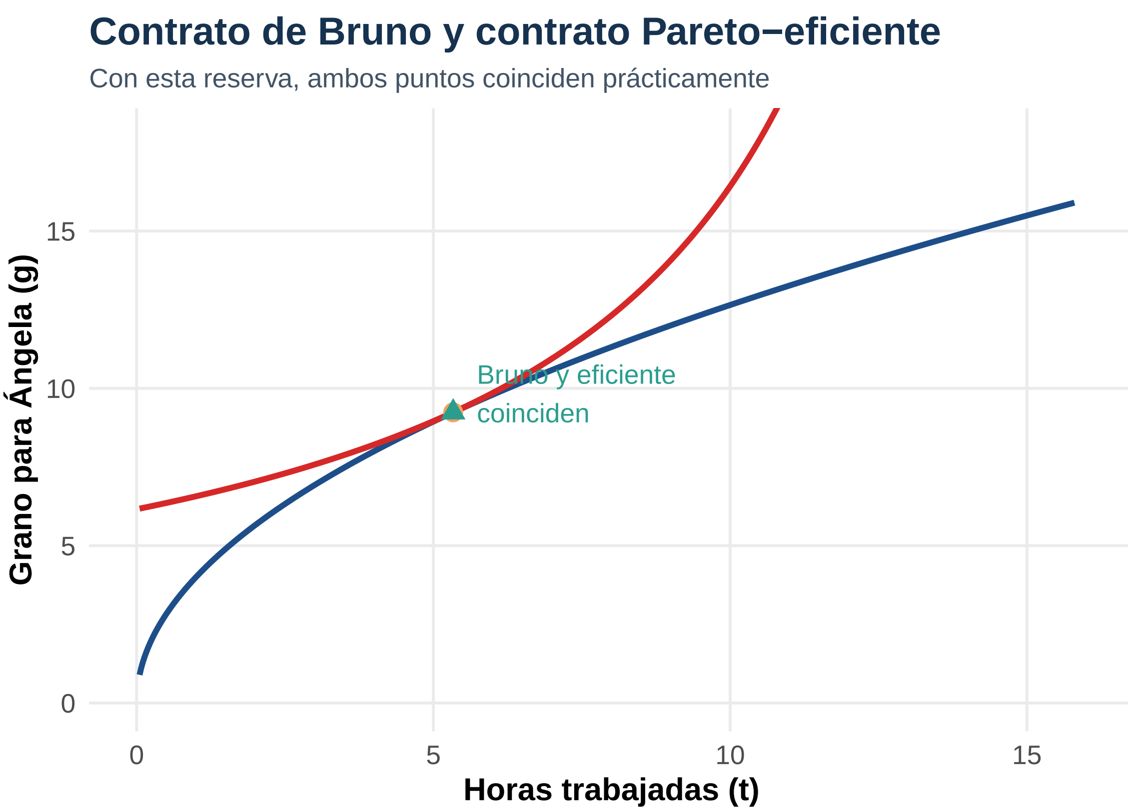
En el contrato de Bruno:

$$\text{TMS} \approx 0{,}87, \qquad f'(t_B) \approx 0{,}87.$$

Se cumplen prácticamente iguales. Por tanto, en esta parametrización el contrato de Bruno coincide con el contrato Pareto-eficiente:

$$(t^{**}, g^{**}) \approx (5{,}33, 9{,}24).$$

Ángela trabaja prácticamente las mismas horas y recibe el mismo grano que en su óptimo autónomo. La razón es que la opción de reserva usada en el ejercicio es justamente su óptimo autónomo; Bruno no puede extraer excedente positivo sin violar la participación.



4.6. 5. Excedente y su distribución

4.6.1. Enunciado

(Excedente y su distribución.)

(a) Calcule el excedente total en el contrato de Bruno $S^{Bruno} = \pi_B^* + U^{Bruno}$ y en el contrato Pareto-eficiente $S^{**} = \pi_B^* + U^{**}$.

Nota: compare en términos de utilidad de Ángela; la ganancia de Bruno es la misma en ambos casos por construcción.

(b) ¿Cuál contrato genera mayor bienestar conjunto? ¿Dónde se "pierde" excedente en el contrato de Bruno?

(c) Represente en un diagrama (utilidad de Ángela, ganancia de Bruno) la **frontera de Pareto** de los contratos factibles, marcando: (i) la opción de reserva de Ángela, (ii) el contrato de Bruno, y (iii) el contrato Pareto-eficiente.

4.6.2. Respuesta

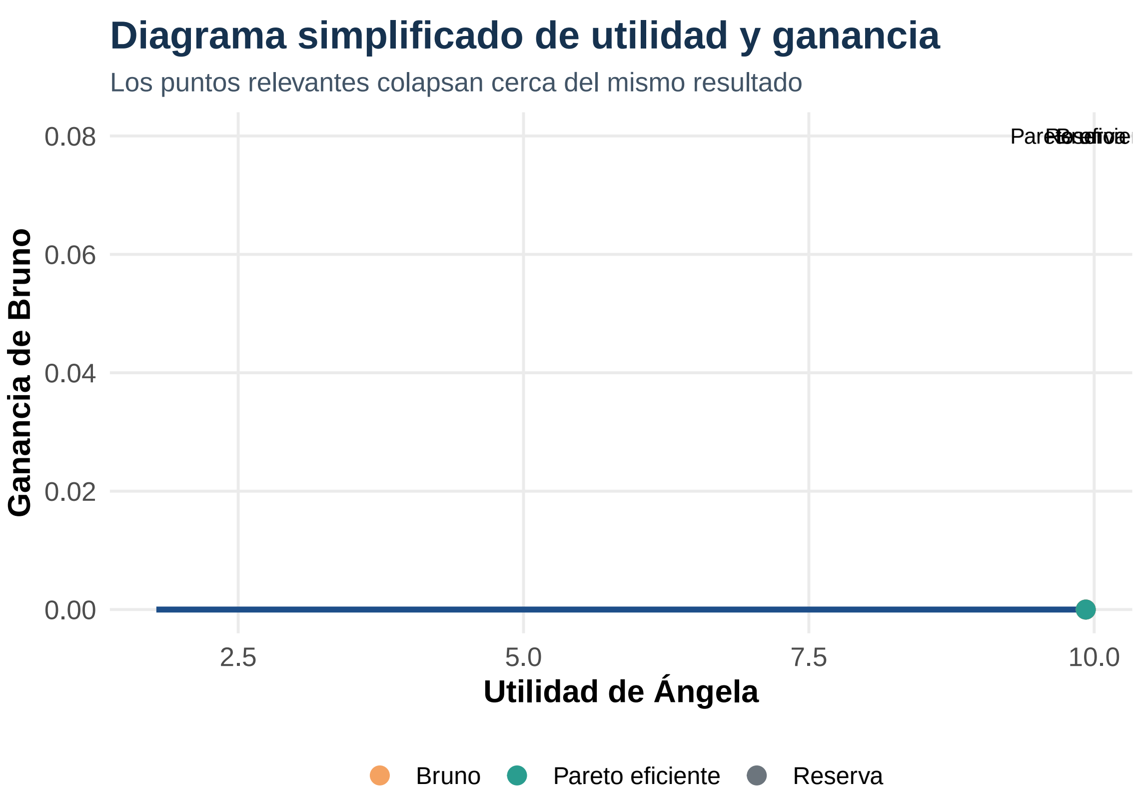
Como el contrato de Bruno coincide con el Pareto-eficiente en esta parametrización:

$$U^{Bruno} = U^{**} = \bar{U}, \qquad \pi_B^* \approx 0.$$

Por tanto:

$$S^{Bruno} \approx S^{**} \approx \bar{U}.$$

No hay pérdida adicional de excedente en el contrato de Bruno, porque ya está sobre la frontera eficiente. Lo que ocurre es más fuerte: no hay excedente positivo extraíble por Bruno por encima de la opción de reserva de Ángela.



5. Parte IV. Matemático III: Legislación, negociación y distribución del excedente

5.1. Contexto

Continuamos con el mismo modelo. Ángela obtiene el derecho a rechazar contratos (ya no puede ser coaccionada) y luego el parlamento introduce sucesivas mejoras institucionales. Analizamos cómo cada cambio redistribuye el excedente y si cambia la eficiencia. Usamos los mismos parámetros: $f(t) = 4\sqrt{t}$, $U(l, g) = l^{1/2}g^{1/2}$, $\bar{U} = U^*$ del Ejercicio I.

5.2. 1. Etapa 1: Ángela puede rechazar — Bruno propone, Ángela decide

5.2.1. Enunciado

(Etapa 1: Ángela puede rechazar — Bruno propone, Ángela decide.)

(a) Cuando Ángela puede rechazar, Bruno sigue haciendo la oferta "toma o deja". ¿Cambia el contrato óptimo de Bruno respecto al Ejercicio II? ¿Por qué?

(b) La diferencia con el caso de coerción es que ahora la restricción biológica **no** es el piso: el piso es la opción de reserva $\bar{U} = U^*$. Compare: si la restricción biológica ($\bar{g} = 4$) diera menos utilidad que U^*, ¿eso significa que Ángela está dispuesta a aceptar menos que en el óptimo autónomo? ¿Cuál restricción prevalece?

(c) ¿Mejora el bienestar de Ángela al pasar de coerción a voluntariedad? ¿Cambia la eficiencia del acuerdo?

5.2.2. Respuesta

No cambia respecto del Ejercicio II porque ese ejercicio ya incorporaba la restricción de participación con $\bar{U} = U^*$. Bruno sigue proponiendo el contrato, pero debe respetar que Ángela pueda rechazar.

La restricción relevante es la más exigente. Si la restricción biológica entrega menos utilidad que el óptimo autónomo, Ángela no aceptaría simplemente sobrevivir: puede obtener U^* por sí misma. Por tanto, prevalece la opción de reserva.

Al pasar de coerción a voluntariedad, Ángela mejora si antes podía ser forzada a aceptar menos que su reserva. La eficiencia puede o no cambiar. En esta parametrización, el contrato voluntario coincide con el punto eficiente autónomo.

5.3. 2. Etapa 2: Ley de horas máximas de trabajo $\bar{t} = t^{**}$

5.3.1. Enunciado

(Etapa 2: Ley de horas máximas de trabajo $\bar{t} = t^{**}$.) El parlamento establece una jornada máxima igual a las horas del contrato Pareto-eficiente t^{**} encontrado en el Ejercicio II.

(a) ¿Cómo cambia el conjunto factible de contratos para Bruno? Grafique el nuevo conjunto en el plano (t, g).

(b) Bruno ahora sólo puede ofrecer $t \leq t^{**}$. ¿Cuál es la mejor oferta que puede hacer Bruno dentro de este conjunto y que Ángela acepte?

(c) Calcule los nuevos π_B^{ley} y U^{ley}. Compare con el contrato de Bruno sin ley: ¿quién gana y quién pierde con la legislación?

(d) ¿Es el nuevo contrato Pareto-eficiente? Represente el resultado en el diagrama (U_{ngela}, π_B) del literal 5(c) del Ejercicio II.

5.3.2. Respuesta

La ley elimina contratos con:

$$t > t^{**}.$$

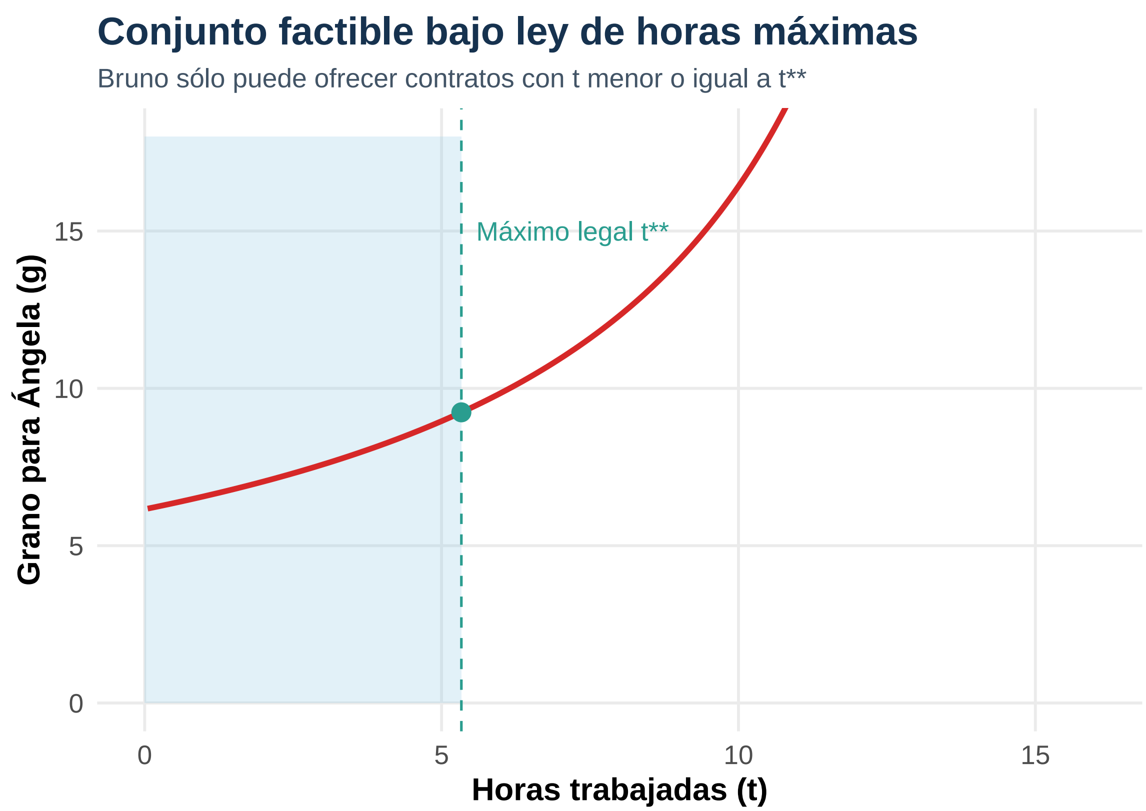
Como aquí $t^{**} = t_B^* = t^*$, la ley no cambia el resultado numérico. La mejor oferta aceptable sigue siendo:

$$(t^{ley}, g^{ley}) = (t^{**}, g^{**}).$$

Por tanto:

$$\pi_B^{ley} \approx -0,0000, \qquad U^{ley} \approx 9,93.$$

Nadie gana ni pierde respecto del contrato voluntario ya calculado, porque la ley coincide exactamente con el punto eficiente. El contrato sigue siendo Pareto-eficiente.



5.4. 3. Etapa 3: Ángela tiene poder de negociación — reparto igualitario del excedente

5.4.1. Enunciado

(Etapa 3: Ángela tiene poder de negociación — reparto igualitario del excedente.) Suponga ahora que Ángela también puede hacer propuestas (negociación Nash): el acuerdo maximiza el producto de los excedentes de ambas partes por encima de sus opciones de reserva. La opción de reserva de Bruno es $\pi_B = 0$ (si no hay acuerdo, no obtiene nada de la tierra).

(a) El problema de negociación de Nash elige (t, g) para maximizar:

$$N(t, g) = [U(16 - t, g) - \bar{U}] \cdot [f(t) - g - 0].$$

Explique geométricamente cómo se caracteriza la solución: ¿en qué punto de la frontera de Pareto se ubica?

(b) Muestre que la solución de Nash se encuentra en la frontera de Pareto (TMS de Ángela = pendiente de la frontera factible). ¿Por qué?

(c) Para encontrar el punto exacto, use el contrato Pareto-eficiente (t^{**}, g^{**}) como punto de partida. En la frontera de Pareto, la ganancia de Bruno es $\pi_B = f(t^{**}) - g$. La solución de Nash reparte el excedente igualitariamente si los poderes de negociación son iguales. El excedente total Pareto-eficiente es $S^{**} = f(t^{**}) - g^{RP}(t^{**})$ (la diferencia entre lo producido y lo mínimo que acepta Ángela). Con reparto 50-50: $\pi_B^{Nash} = S^{**}/2$. Calcule $g^{Nash} = f(t^{**}) - \pi_B^{Nash}$.

(d) Compare los tres regímenes en la siguiente tabla:

Contrato / Régimen	t (horas)	g_{ngela} (grano)	π_B (Bruno)
Bruno "toma o deja" (Ej. II)			
Ley de horas máximas (Etapa 2)			
Negociación Nash (Etapa 3)			
Óptimo autónomo de Ángela	t^*	g^*	0

5.4.2. Respuesta

La solución de Nash se ubica sobre la frontera de Pareto porque si hubiera una mejora mutua posible, aumentaría el excedente de al menos una parte sin reducir el de la otra, elevando el producto de Nash.

En este caso, el excedente Pareto-eficiente disponible sobre la reserva de Ángela y la reserva de Bruno es:

$$S^{**} = f(t^{**}) - g^{RP}(t^{**}).$$

Pero como $g^{RP}(t^{**}) = f(t^{**})$, se obtiene:

$$S^{**} \approx 0.$$

Por tanto:

$$\pi_B^{Nash} = \frac{S^{**}}{2} \approx 0,$$

y

$$g^{Nash} = f(t^{**}) - \pi_B^{Nash} \approx g^*.$$

Tabla 3: Comparación de regímenes

Contrato / Régimen	t (horas)	g Ángela	Bruno
Bruno toma o deja	5.333	9.238	0
Ley de horas máximas	5.333	9.238	0
Negociación Nash	5.333	9.238	0
Óptimo autónomo de Ángela	5.333	9.238	0

5.5. 4. Síntesis geométrica: la frontera de Pareto y los cuatro regímenes

5.5.1. Enunciado

(Síntesis geométrica: la frontera de Pareto y los cuatro regímenes.)

(a) En el plano (U_{ngela}, π_B) grafique la frontera de Pareto de todos los contratos eficientes. Marque los cuatro puntos de la tabla anterior.

(b) ¿Todos los puntos están sobre la frontera de Pareto? Si alguno está por debajo, ¿cómo se interpreta la ineficiencia?

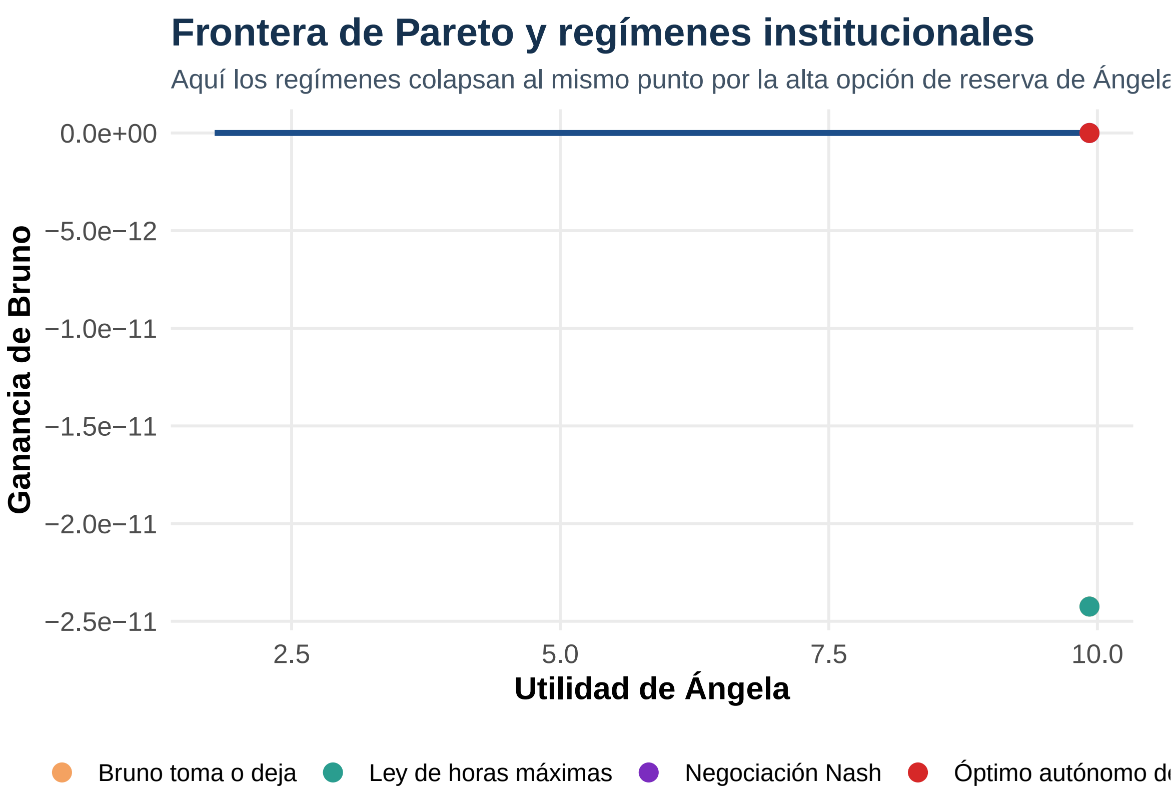
(c) El movimiento a lo largo de la frontera de Pareto redistribuye el excedente sin cambiar su tamaño total. ¿En qué dirección se mueve Ángela a lo largo de la frontera cuando mejora su poder de negociación?

(d) ¿Qué concluye sobre la relación entre instituciones, poder y distribución del excedente en este modelo? ¿Puede la política pública mejorar la situación de Ángela sin reducir el tamaño total del pastel? ¿Bajo qué condiciones?

5.5.2. Respuesta

En esta parametrización, los cuatro puntos relevantes coinciden prácticamente. Esto ocurre porque la opción de reserva de Ángela es tan fuerte que absorbe todo el excedente generado por el contrato factible con Bruno.

En general, cuando mejora el poder de negociación de Ángela, el punto se mueve hacia mayor utilidad de Ángela y menor ganancia de Bruno. Si el movimiento ocurre sobre la frontera de Pareto, redistribuye sin reducir el tamaño del pastel. Si además el contrato inicial era ineficiente, la política pública puede mejorar a Ángela sin reducir eficiencia e incluso mejorar a ambos.



5.6. 5. Discusión final: el modelo y sus límites

5.6.1. Enunciado

(Discusión final: el modelo y sus límites.)

(a) El modelo supone que Bruno y Ángela tienen información completa sobre la producción y las preferencias del otro. ¿Qué cambiaría si Ángela tuviera información privada sobre su productividad? ¿Podría Bruno extraer el mismo excedente?

(b) El modelo supone que los contratos son perfectamente ejecutables (*enforceable*). ¿Qué ocurre si Ángela puede trabajar menos de lo prometido sin ser detectada? ¿Cómo cambiaría el contrato que Bruno ofreceria?

(c) En la realidad, muchas relaciones laborales tienen características de ambos extremos: cierto poder del empleador y cierta capacidad de negociación del trabajador. ¿Cómo captura el modelo el efecto de los sindicatos? ¿Y el de una tasa de desempleo alta (que reduce la opción de reserva del trabajador)?

5.6.2. Respuesta

Si Ángela tiene información privada sobre su productividad, Bruno no puede diseñar perfectamente el contrato. Podría ofrecer un contrato que no extrae todo el excedente o que induce a Ángela a revelar información. Aparecen problemas de selección adversa o incentivos.

Si los contratos no son perfectamente ejecutables, Bruno debe considerar el esfuerzo real, no sólo el prometido. Podría ofrecer pagos ligados a resultados, monitoreo, castigos o contratos más simples. Eso introduce costos de supervisión y puede reducir el excedente total.

Los sindicatos pueden interpretarse como instituciones que elevan la opción de reserva efectiva del trabajador y aumentan su poder de negociación. Una tasa de desempleo alta hace lo contrario: reduce alternativas externas, debilita la capacidad de rechazar ofertas y desplaza la distribución del excedente hacia el empleador.

Tabla 4: Límites del modelo Bruno-Ángela

supuesto	si_falla	consecuencia
Información completa	Productividad o preferencias privadas	Bruno no extrae todo el excedente
Contratos ejecutables	Esfuerzo no observable o no verificable	Aparecen monitoreo e incentivos
Poder dado	Instituciones cambian opciones de reserva	Sindicatos/desempleo redistribuyen excedente

Idea final de la guía: la productividad define cuánto se puede producir, pero las instituciones definen quién puede decir “no” y, por tanto, quién captura el excedente. En este modelo, una opción de reserva fuerte puede ser tan poderosa como una regulación formal.